LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

ÉTUDE DES OSCILLATIONS FONDAMENTALES D'UN ENSEMBLE DE GROUPEMENTS ATOMIQUES IDENTIQUES AU MOYEN DE LA MÉTHODE DU COUPLAGE

Par Lucienne COUTURE et Jean-Paul MATHIEU.

Laboratoire des Recherches Physiques, Sorbonne.

Sommaire. — Lorsqu'une molécule ou une maille cristalline est formée de groupements atomiques homologues, la théorie des groupes permet de dénombrer dans tous les cas les mouvements de l'ensemble provenant du couplage des mouvements des groupements et d'en prévoir le type. En toute rigueur, on ne peut parler du couplage d'un seul mouvement ou d'une seule oscillation des groupements, mais on doit considérer simultanément tous les mouvements appartenant aux divers types entrant dans la composition d'une oscillation fondamentale de l'ensemble.

1. Lorsqu'une molécule renferme plusieurs radicaux identiques, son groupe de symétrie G admet pour sous-groupe le groupe de symétrie g de ces radicaux. De même, lorsque la maille d'un cristal contient plusieurs groupements d'atomes (molécules ou ions complexes) de même composition et homologues, le groupe de symétrie g de ceux-ci est un sous-groupe du groupe fini G homéomorphe au groupe infini de symétrie de la maille. Dans ce qui suit, pour plus de généralité, nous désignerons les radicaux, molécules ou ions complexes que nous venons de considérer par le terme de *constituants* et par *ensemble* la molécule ou la maille, selon les cas.

Il est possible de rattacher certaines oscillations fondamentales de la molécule ou certaines oscillations principales du cristal aux oscillations fondamentales de leurs constituants. Pour cela, on considère une de ces dernières oscillations et on la répète par toutes les opérations de symétrie de l'ensemble qui font les divers constituants se correspondre entre eux. Cette répétition doit se faire en tenant compte des divers modes possibles (symétrique, antisymétrique, dégénéré) et l'on obtient dans chaque cas une oscillation fondamentale de l'ensemble. Cela revient à attribuer à tous les constituants homologues la même oscillation fondamentale, avec des relations de phase différentes d'un mode à l'autre; on peut donc dire que plusieurs oscillations fondamentales de l'ensemble résultent de couplages d'un même mouvement des constituants, ce mouvement étant pris successivement avec toutes les relations de phase compatibles avec la symétrie de l'ensemble. Le même procédé, appliqué aux translations et aux rotations des constituants, donne d'autres oscillations fondamentales de l'ensemble.

Les principes de la méthode de couplage, utilisée par Kastler et Rousset [1] pour les cristaux, ont été clairement indiqués par J. Cabannes [2] et appliqués maintes fois depuis lors [3, 4, 5]. Cette méthode présente l'avantage de permettre une prévision approchée des fréquences de l'ensemble et même de l'intensité des raies de Raman correspondantes. Toutefois, lorsque le groupe G possède une symétrie élevée, l'application de cette méthode devient assez délicate pour que l'on en ait parfois tiré des conclusions inexactes. C'est pourquoi nous nous sommes proposés de l'exposer ici sous une forme générale et quasi automatique, à laquelle conduit l'application de la théorie des groupes.

2. Soient t_1, t_2, ..., les types de symétrie (*Typen* de Placzek et de Kohlrausch, *types* de Herzberg) des oscillations fondamentales du groupe g des

constituants; T_1, T_2, ..., les types des oscillations fondamentales du groupe G de l'ensemble. Le problème du couplage consiste à trouver tous les types T_i (i de 1 à n) provenant d'un type t_j. Les oscillations de l'ensemble étant dérivées de celles de l'un des constituants comme on l'a expliqué au paragraphe 1, il est clair que les types T_i doivent avoir la même symétrie que le type t_j par rapport à tous les éléments de symétrie communs à l'ensemble et à un constituant. Deux cas peuvent alors se présenter.

A. Dans le premier, aucune dégénérescence n'est introduite par la présence des éléments de symétrie que possède l'ensemble en outre de ceux qui appartiennent également à l'un de ses constituants, de sorte qu'à un type d'oscillation T_i ne correspond qu'un type d'oscillation t_j. Mais plusieurs types T_i comprennent le même type t_j, puisque le groupe g est un sous-groupe de G. Le problème posé sera donc résolu si l'on sait dénombrer les n types T_i du groupe G qui se fondent en un seul type t_j dans le groupe g. On y parvient aisément en considérant les représentations irréductibles associées aux types d'oscillations, qui sont connues pour tous les groupes finis (*cf.* [6] par exemple). Dans le cas étudié ici, les représentations $\Gamma(T_i)$ et $\Gamma(t_j)$ ont le même degré. Il suffit de relever les caractères χ que possèdent les représentations $\Gamma(T_i)$ de G par rapport aux seuls éléments de symétrie communs à G et à g et de chercher les n représentations $\Gamma(T_i)$ qui ont les mêmes caractères que la représentation irréductible $\Gamma(t_j)$.

B. Dans le second cas, qui est plus compliqué, les éléments de symétrie particuliers à l'ensemble y font apparaître des oscillations dégénérées qui n'existent pas dans les constituants. Chacune de ces oscillations dégénérées provient en général de la combinaison de plusieurs oscillations de divers types des constituants, qu'il s'agit d'abord de déterminer. Comme dans le premier cas, on considère les caractères de la représentation $\Gamma(T_k)$ par rapport aux éléments de symétrie communs à G et à g; ce sont les caractères d'une représentation $\Gamma'(T_k)$ du groupe g qui n'est pas irréductible, mais se décompose en p représentations irréductibles $\Gamma(t_j)$ du groupe g (j = 1 à p). On obtient ainsi les p mouvements des types différents qui sont les composantes de l'oscillation de type T_k. On répète cette décomposition pour tous les types dégénérés T_k.

En appliquant la théorie des groupes à la méthode du couplage, qui part des oscillations des constituants pour en déduire celles de l'ensemble, on est donc conduit à suivre d'abord une marche inverse et à chercher les types d'oscillations du groupe g contenus dans ceux du groupe G. Ce dernier problème a déjà été abordé par divers auteurs, qui cherchaient comment se décomposent les types d'oscillations d'une molécule lorsqu'on y fait des substitutions qui abaissent sa symétrie (passage de Cl_4C à Cl_3HC, etc.). On trouvera des résultats assez étendus de cette recherche à la page 237 de l'ouvrage de Herzberg [6].

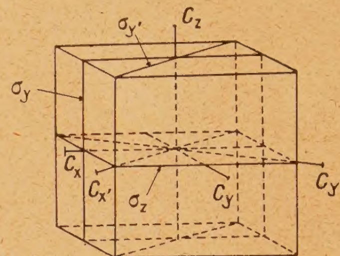


Fig. 1.

3. Un exemple éclairera ce qui précède. Soit à chercher les types d'oscillations fondamentales provenant du couplage des mouvements des constituants d'une molécule ou d'une maille cristalline appartenant au groupe de symétrie cubique holoèdre O_h. La première ligne du Tableau I contient les divers types d'oscillation T_i du groupe $G = O_h$, avec la notation de Placzek. Chaque colonne indique le ou les types t_j correspondant à T_i dans tous les sous-groupes g du groupe O_h que l'on peut rencontrer dans une molécule ou dans un cristal de symétrie O_h. On voit que les types d'oscillations simples A de O_h ne donnent jamais qu'un type d'oscillation, que l'on obtient comme on l'a dit au paragraphe 2, A. Au contraire, chaque type d'oscillations dégénérées double (E) ou triple (F) donne, selon le sous-groupe considéré, un, deux ou trois types d'oscillations t_j, que l'on obtient ainsi qu'on l'a indiqué au paragraphe 2, B.

Il faut prendre garde que, dans certains cas, les types t_j d'un sous-groupe donné qui correspondent à un type T_i, peuvent être différents lorsque les éléments de symétrie du groupe g occupent diverses positions par rapport à ceux du groupe G. Ces cas ont été précisés dans les notes jointes au Tableau I.

On notera que l'on peut prendre pour groupe G l'un quelconque des groupes portés sur une ligne du Tableau I et se servir de ce tableau pour étudier la décomposition des types dans les groupes de symétrie plus basse contenus sur les lignes situées au-dessous de celle dont on part.

4. Lorsqu'on a établi un tableau analogue au Tableau I pour un groupe G quelconque, on s'en sert de la façon suivante pour étudier le résultat des couplages entre les oscillations de constituants appartenant à un sous-groupe g. Un même type de mouvement t_j du groupe g se trouve toujours

TABLEAU I.

Groupes.	Types de mouvements.																				
$O_h - \frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$..	A_{1g}	A_{1u}	A_{2g}	A_{2u}	E_g		E_u		F_{1g}			F_{1u}			F_{2g}			F_{2u}			
$O - 432$ ou $T_d - \bar{4}3m$.	A_1	A_2	A_2	A_1	E		E		F_1			F_2			F_1			F_2			
$T_h - \frac{2}{m}\bar{3}$....	A_g	A_u	A_g	A_u	$\underline{E}_g$		$\underline{E}_u$		F_g			F_u			F_g			F_u			
$T - 23$.....	A	A	A	A	$\underline{E}$		$\underline{E}$		F			F			F			F			
$D_{3d} - \bar{3}\frac{2}{m}$....	A_{1g}	A_{1u}	A_{2g}	A_{2u}	E_g		E_u		A_{2g}	E_g		A_{2u}	E_u		A_{1g}	E_g		A_{1u}	E_u		
$D_3 - 32$.....	A_1	A_1	A_2	A_2	E		E		A_2	E		A_2	E		A_1	E		A_1	E		
$C_{3v} - 3m$.....	A_1	A_2	A_2	A_1	E		E		A_2	E		A_1	E		A_1	E		A_2	E		
$C_{3i} - \bar{3}$.......	A_g	A_u	A_g	A_u	E_g		E_u		A_g	E_g		A_u	E_u		A_g	E_g		A_u	E_u		
$C_3 - 3$.......	A	A	A	A	$\underline{E}$		$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		
$D_{4h} - \frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$.	A_{1g}	A_{1u}	B_{1g}	B_{1u}	A_{1g}	B_{1g}	A_{1u}	B_{1u}	A_{2g}	E_g		A_{2u}	E_u		B_{2g}	E_g		B_{2u}	E_u		(1), (2)
$D_4 - 422$....	A_1	A_1	B_1	B_1	A_1	B_1	A_1	B_1	A_2	E		A_2	E		B_2	E		B_2	E		(1), (2)
$C_{4v} - 4mm$...	A_1	A_2	B_1	B_2	A_1	B_1	A_2	B_2	A_2	E		A_1	E		B_2	E		B_1	E		(1), (3)
$C_{4h} - \frac{4}{m}$.....	A_g	A_u	B_g	B_u	A_g	B_g	A_u	B_u	A_g	$\underline{E}_g$		A_u	$\underline{E}_u$		B_g	$\underline{E}_g$		B_u	$\underline{E}_u$		(1)
$C_4 - 4$.......	A	A	B	B	A	B	A	B	A	$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		B	$\underline{E}$		B	$\underline{E}$		(1)
$V_d - \bar{4}2m$...	A_1	B_1	B_2	A_2	A_1	B_2	B_1	A_2	A_2	E		B_2	E		B_1	E		A_1	E		(1), (4)
	A_1	B_1	B_1	A_1	A_1	B_1	B_1	A_1	A_2	E		B_2	E		B_2	E		A_2	E		(1), (5)
$S_4 - \bar{4}$.......	A	B	B	A	A	B	B	A	A	$\underline{E}$		B	$\underline{E}$		B	$\underline{E}$		A	$\underline{E}$		(1)
$D_{2h} - \frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$.	A_g	A_u	A_g	A_u	A_g	A_g	A_u	A_u	B_{1g}	B_{2g}	B_{3g}	B_{1u}	B_{2u}	B_{3u}	B_{1g}	B_{2g}	B_{3g}	B_{1u}	B_{2u}	B_{3u}	(6)
	A_g	A_u	B_{1g}	B_{1u}	A_g	B_{1g}	A_u	B_{1u}	B_{1g}	B_{2g}	B_{3g}	B_{1u}	B_{2u}	B_{3u}	A_g	B_{2g}	B_{3g}	A_u	B_{2u}	B_{3u}	(7)
$D_2 - 222$....	A	A	A	A	A	A	A	A	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	(6)
	A	A	B_1	B_1	A	B_1	A	B_1	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	A	B_2	B_3	A	B_2	B_3	(7)
$C_{2v} - 2mm$...	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_1	A_2	A_2	A_2	B_1	B_2	A_1	B_2	B_1	A_2	B_1	B_2	A_1	B_2	B_1	(8), (11)
	A_1	A_2	A_2	A_1	A_1	A_2	A_2	A_1	A_2	B_1	B_2	A_1	B_2	B_1	A_1	B_1	B_2	A_2	B_2	B_1	(8), (12)
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_1	A_2	A_2	B_1	B_2	A_2	B_2	B_1	A_1	B_1	B_2	A_2	B_2	B_1	A_1	(9), (13)
	A_1	A_2	B_1	B_2	A_1	B_1	A_2	B_2	B_1	B_2	A_2	B_2	B_1	A_1	A_1	B_2	A_2	A_2	B_1	A_1	(10), (13)
$C_2 - 2$.......	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B	B	(8)
	A	A	A	A	A	A	A	A	B	A	B	B	A	B	B	A	B	B	A	B	(9)
	A	A	B	B	A	B	A	B	B	A	B	B	A	B	A	A	B	A	A	B	(10)
$C_s - m$......	A'	A''	A'	A''	A'	A'	A''	A''	A'	A''	A''	A''	A'	A'	A'	A''	A''	A''	A'	A'	(14)
	A'	A''	A'	A''	A'	A'	A''	A''	A''	A''	A'	A'	A'	A''	A''	A''	A'	A'	A'	A''	(15)
	A'	A''	A''	A'	A'	A''	A''	A'	A''	A''	A'	A'	A'	A''	A'	A''	A'	A''	A'	A''	(16)
$C_i - \bar{1}$.......	A_g	A_u	A_g	A_u	A_g	A_g	A_u	A_u	A_g	A_g	A_g	A_u	A_u	A_u	A_g	A_g	A_g	A_u	A_u	A_u	

On se reportera à la figure 1 et aux notations de Placzek [11].

(1) Dans les groupes quaternaires, l'axe 4 est C_z. — (2) La première famille d'axes binaires est $C_x\, C_y$; la seconde $C_{x'}$, $C_{y'}$. — (3) La première famille de plans de symétrie est $\sigma_x \sigma_y$ (plans perpendiculaires à C_x et C_y respectivement); la seconde famille est $\sigma_{x'}\, \sigma_{y'}$. — (4) Plans $\sigma_x\, \sigma_{y'}$. — (5) Plans $\sigma_{x'}\, \sigma_{y'}$. — (6) Axes de [11] parallèles à $C_x\, C_y\, C_z$. — (7) Axes de [11] parallèles à $C_{x'}\, C_{y'}\, C_z$. — (8) Axe binaire C_z. — (9) Axe binaire C_x. — (10) Axe binaire $C_{x'}$. — (11) Plan σ_y de [11] parallèle à σ_y. — (12) Plan σ_y de [11] parallèle à $\sigma_{y'}$. — (13) Plan σ_y de [11] parallèle à σ_z. — (14) Plan σ_z. — (15) Plan σ_x. — (16) Plan $\sigma_{x'}$.

dans plusieurs colonnes, correspondant à des types T_i différents du groupe G. Ceux-ci représentent les oscillations différentes auxquelles donnent naissance par couplage les mouvements de type t_j. Si une colonne T_i ne contient qu'un type t_j, le couplage donne autant d'oscillations de type T_i dans G qu'il y a de mouvements du type t_j dans g. Si une colonne T_i contient plusieurs types $t_1, \ldots, t_p$, autant d'oscillations T_i se forment par couplage qu'il existe de mouvements à la fois dans les types $t_1, \ldots, t_p$.

Les seuls cas délicats sont ceux où le groupe g contient des mouvements doublement dégénérés dits « décomposables » (*trennbar* de Placzek) que l'on désigne par $\underline{E}$ dans le Tableau I. On sait (*cf.* par exemple [6]) qu'il est possible de caractériser une

oscillation fondamentale de ce genre par une couple de coordonnées normales choisies de façon que les opérations de symétrie du groupe transforment en elle-même (à un facteur complexe près) chacune des coordonnées de la couple. Chacune d'elles a donc sa propre représentation irréductible de degré 1 et ses caractères, ainsi que ses lois particulières de transformation dans le groupe g; tandis qu'aux deux coordonnées normales liées à une oscillation indécomposable E, qui se transforment l'une en l'autre par les opérations de symétrie, ne correspond qu'une représentation irréductible de degré 2. De là résulte que, lorsqu'on cherche les types t_j en partant de la décomposition des représentations des types T_i et inversement lorsqu'on cherche le résultat des couplages, on doit en fait considérer les deux composantes d'un mouvement décomposable comme appartenant à deux types différents, bien qu'on les englobe sous la même désignation $\underline{E}$, parce que leurs représentations sont complexes conjuguées et qu'elles correspondent à la même fréquence.

Prenons pour exemple [5] la maille du chlorate de sodium, de symétrie $G = T$; elle renferme des ions ClO_3 de symétrie $g = C_3$, au nombre de quatre. Chaque ion ClO_3 a quatre mouvements de type A (deux oscillations totalement symétriques, la translation suivant l'axe principal, la rotation autour de cet axe) et quatre mouvements doublement dégénérés du type $\underline{E}$ (deux oscillations, la translation et la rotation perpendiculaires à l'axe ternaire). Le type A du groupe C_3 apparaît à la fois dans les colonnes A et F du groupe T, les types $\underline{E}$ dans les colonnes $\underline{E}$ et F. Par suite on peut dénombrer les oscillations résultant du couplage, en disant qu'un mouvement A de ClO_3 donne une oscillation A et une oscillation F de la maille; que les deux composantes d'un mouvement $\underline{E}$ donnent chacune une composante d'une oscillation $\underline{E}$ de la maille et une oscillation F. Une vérification s'impose : un mouvement A de ClO_3 correspond à un degré de liberté; il y a donc quatre degrés de liberté pour les quatre ions de la maille considérés isolément. Ce nombre n'est pas modifié par le couplage : on trouve bien, en effet, pour l'ensemble, un degré de liberté dans l'oscillation A, trois dans l'oscillation F. De même les $4 \times 2 = 8$ degrés de liberté des quatre ions dans un mouvement dégénéré $\underline{E}$ se retrouvent dans l'oscillation $\underline{E}$ (2) et dans les deux oscillations F (3×2) de la maille.

5. Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à établir la dérivation des types et le dénombrement global des oscillations obtenues par couplage. Lorsqu'on cherche à estimer l'ordre de grandeur des fréquences et à représenter par des schémas les oscillations de l'ensemble, on est le plus souvent conduit à préciser que l'une de celles-ci provient par couplage d'un mouvement déterminé des constituants. Pour prendre un exemple entre tant d'autres, c'est de cette façon que l'un de nous a classé les oscillations fondamentales des platocyanures [7].

Nous allons montrer, sur cet exemple concret et assez complet, que l'on ne doit pas en général parler du couplage de l'*une* des oscillations ou de l'*un* des mouvements des constituants, mais qu'en toute rigueur, c'est la totalité des mouvements appartenant à un type donné t_j qui entre dans la composition d'une des oscillations fondamentales de l'ensemble, lorsque celle-ci n'a pas un degré de dégénérescence plus élevé que les mouvements dont on est parti (§ 2, A); que si l'ensemble comprend des oscillations dégénérées supplémentaires, ce sont tous les mouvements des p types t_j considérés au paragraphe 2, B qu'il faut faire intervenir pour obtenir une de ces oscillations.

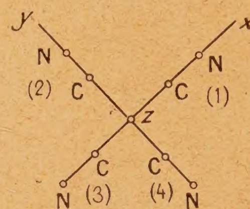


Fig. 2.

L'ensemble Pt $(CN)_4$ a la symétrie du groupe D_{4h}. Chacun des quatre constituants CN a dans cet ensemble la symétrie C_{2v} (*fig.* 2). Le Tableau I montre que les relations entre les types d'oscillations T_i du groupe D_{4h} et les types t_j du groupe C_{2v} sont les suivantes.

Tableau II.

D_{4h}...	A_{1g}	A_{1u}	A_{2g}	A_{2u}	B_{1g}	B_{1u}	B_{2g}	B_{2u}	E_g	E_u
C_{2v}...	A_1	A_2	B_1	B_2	A_1	A_2	B_1	B_2	$A_2 B_2$	$A_1 B_1$

Un groupement CN possède une seule oscillation fondamentale V et des mouvements de translation T et de rotation R qui, pour l'ion désigné par (1) sur la figure 2 ont les types suivants :

V et T_x : type A_1 ; T_y et R_z : type B_1 ; T_z et R_y : type B_2.

D'autre part, en dénombrant les oscillations fondamentales de l'ensemble des quatre groupements CN, abstraction faite de l'atome central qui ne nous intéresse pas du point de vue de la théorie du couplage, on obtient (*cf.* par exemple [8]) : deux oscillations de type A_{1g}, 2 A_{2g} (dont R_z), 2 A_{2u} (T_z), 2 B_{1g}, 2 B_{2g}, 2 B_{2u}, 2 E_g ($R_\perp$), 4 E_u ($T_\perp$).

Considérons d'abord les deux mouvements de type A_1. Le Tableau II montre que les oscillations fondamentales simples de l'ensemble $(CN)_4$ qui se

forment par couplage à partir des mouvements A_1 ont les types A_{1g} et B_{1g}. La figure 3 montre les

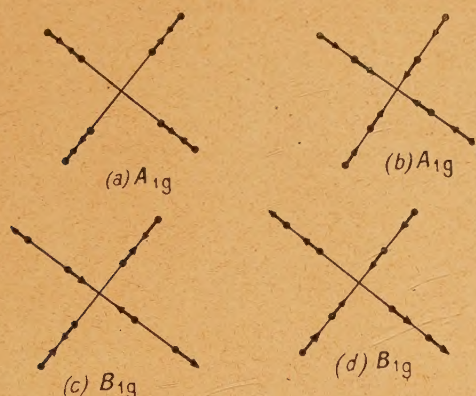


Fig. 3.

schémas de ces oscillations, que l'on obtient en couplant, d'une part la vibration V (3 a et 3 c), de l'autre la translation T_x (3 b et 3 d). Mais ces

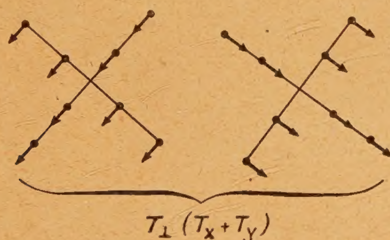


Fig. 4.

cas purs de couplage, aisés à représenter, ne constituent sans doute que des cas limites, les mouvements d'ensemble des groupements CN dans les schémas 3 b

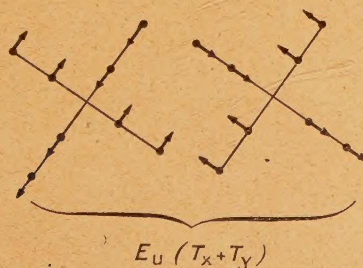


Fig. 5.

et 3 d pouvant s'accompagner d'une variation de la distance C—N, de même que leurs oscillations en 3 a et 3 c peuvent se produire en même temps qu'un déplacement du centre de gravité de leurs masses. La proportion dans laquelle se mélangent les deux mouvements de même type V et T_x dépend des conditions dynamiques qui règnent dans l'ensemble.

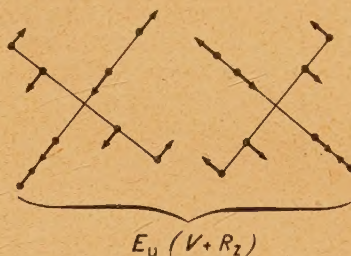


Fig. 6.

Les mouvements de type A_1 des groupes CN entrent également dans la composition des oscillations fondamentales doublement dégénérées de type E_u de l'ensemble, associées cette fois aux

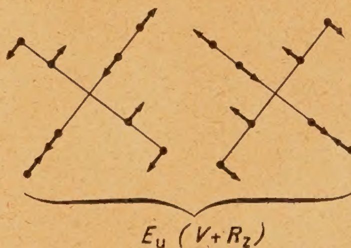


Fig. 7.

mouvements de type B_1. On se rend compte aisément que cette association de deux types est indispensable à la formation des mouvements E_u par couplage. Un cas particulièrement simple de mouve-

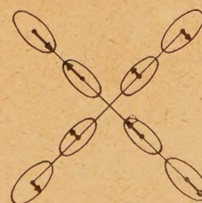


Fig. 8.

ment E_u est la translation $T_\perp$, qui provient de la combinaison de T_x (type A_1) et de T_y (type B_1). La figure 4 représente deux composantes rectilignes de la translation $T_\perp$; on voit que les translations A_1 des groupements CN (1) et (3) de la figure 1 sont nécessairement associées aux translations B_1 des groupes (2) et (4) et réciproquement. Quant aux trois autres oscillations d'ensemble de type E_u, on en obtient des schémas simples, d'abord à partir de T_x et T_y encore, comme le montre la

figure 5 (antitranslation); puis en associant V (type A_1) et R_z (type B_1) de deux manières différentes (*fig.* 6 et 7). En combinant ces deux derniers schémas, avec des rapports d'amplitudes convenables [9] on en obtient d'autres, où les atomes décrivent des trajectoires elliptiques allongées suivant la direction des traits de valence C—N (*fig.* 8) ou suivant la direction perpendiculaire (*fig.* 9), selon

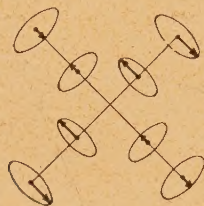


Fig. 9.

que c'est la vibration V ou la rotation R_z qui a l'amplitude la plus grande, l'une ou l'autre n'intervenant exclusivement que dans les cas limites. Tous les schémas précédents, bons pour fixer les idées, sont d'une simplicité excessive; en fait, chaque oscillation de type E_u est composée de V, T_x, T_y et R_z dans des rapports que ne suffisent pas à fixer les considérations de symétrie.

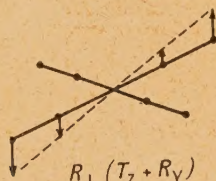


Fig. 10.

Les mouvements de type E_g du groupe D_{4h} se décomposent en mouvements des types A_2 et B_2 du groupe C_{2v}. Mais dans notre exemple, il n'y a pas de mouvements du type A_2. On est donc conduit, inversement, à faire dériver les mouvements E_g des mouvements B_2 seuls. Il se trouve que cela est possible, contrairement à ce que l'on a vu pour les mouvements du type E_u, parce que les atomes ont, dans le cas présent, des trajectoires rectilignes parallèles à l'axe quaternaire Oz. On trouve dans le type E_g la rotation $R_\perp$, dont l'une des composantes est représentée sur la figure 10. On voit qu'elle comprend nécessairement une part de translation T_z et une part de rotation R_y de chacun des groupements CN. L'oscillation fondamentale de type E_g, dont la figure 11 représente

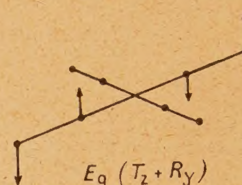


Fig. 11.

une composante, provient d'une autre combinaison de T_z et de R_y, dans des proportions déterminées par les conditions dynamiques.

On doit donc considérer que les schémas simples par lesquels on représente souvent comme couplées entre elles, soit les translations ou les rotations des constituants, soit leurs oscillations, ne correspondent qu'à des cas limites. Toutefois, si les forces de couplage sont faibles devant les forces qui agissent dans les oscillations internes des constituants, il y aura séparation des oscillations de l'ensemble en deux groupes, l'un d'eux, de fréquence beaucoup plus élevée que l'autre, ne contenant guère que les oscillations internes (*fig.* 3 *a* ou 3 *c*); c'est ce que l'expérience vérifie [7]. Par contre, si l'on a affaire à des oscillations de l'ensemble où agissent exclusivement des forces de couplage, c'est-à-dire formées à partir de mouvements des constituants supposés rigides, ces différents mouvements y entrent en proportions comparables (*fig.* 3, 4, 9 et 10). Ce dernier point est à rapprocher des remarques faites par Kastler [10] sur l'interdépendance des oscillations de translation et de rotation dans les cristaux.

Manuscrit reçu le 23 décembre 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Kastler et A. Rousset, *J. Physique et Radium*, Fr., 1941, **2**, p. 49.
[2] J. Cabannes et R. Aynard, *J. Physique et Radium*, Fr., 1942, **3**, p. 137.
[3] A. Rousset, J. Laval et R. Lochet, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1943, **216**, p. 886.
[4] L. Couture, *Ann. de Physique*, 1947, **2**, p. 5.
[5] L. Couture et J. P. Mathieu, *Ann. de Physique*, 1948, **3**, p. 521.
[6] G. Herzberg, Infrared and Raman Spectra, New-York, 1945.
[7] J. P. Mathieu, *J. Chim. Physique*, 1939, **36**, p. 308.
[8] J. P. Mathieu, Spectres de vibration et symétrie, Paris, 1945.
[9] A. Kastler, *Ann. de Physique*, 1945, **20**, p. 455.
[10] A. Kastler, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1948, **227**, p. 1024 et *Proc. Ind. Acad. Sciences*. 1948, **28**, p. 349.
[11] G. Placzek, *Handbuch der Radiologie*, 1934, VI, **2**, p. 292.

ÉTUDE PAR L'EFFET RAMAN DE MONOCRISTAUX DE SULFATES ACIDES DE POTASSIUM ET D'AMMONIUM

Par Lucienne COUTURE et Nicole RICHE.
Laboratoire de Recherches physiques. Sorbonne.

Sommaire. — L'étude de monocristaux de ces sels a été entreprise bien qu'on ne possède que peu de renseignements sur leur structure atomique.

Elle a permis, dans le cas du sulfate acide de potassium, de mettre en évidence les deux familles d'ions sulfate de la maille, et de montrer, par comparaison avec les sulfates acides en solution, qu'il s'agit très probablement d'ions SO^4H dont on a pu préciser les modes de vibrations.

Sulfate acide de potassium.

Introduction. — La structure atomique des cristaux orthorhombiques de sulfate acide de potassium étant inconnue, comme celle de la plupart des sels acides, nous avons cependant tenté d'en faire l'étude par l'effet Raman, espérant mettre en évidence la perturbation des ions SO_4 par les atomes d'hydrogène.

Résultats expérimentaux. — De beaux échantillons cristallins de ce sel ont été préparés par évaporation lente d'une solution très acide de SO_4HK [5]. Ils ont été taillés avec des faces perpendiculaires aux axes binaires du cristal et étudiés en effet Raman pour différentes orientations, ce qui a permis le classement des raies en types de symétrie, indiqués selon la notation de Placzek.

Les résultats expérimentaux sont donnés dans le tableau suivant.

Tableau I (*).

Sulfate acide de potassium SO_4HK

Ensembles	E_2							E_3						
Δν en cm⁻¹	407	410	418	435	449	450	451	578	584	586	593	605	611	620
Type	B_{3g}	A_{1g}	B_{2g}	B_{1g}	A_{1g}	?	B_{1g}	B_{2g}	A_{1g}	B_{1g}	B_{2g}	B_{1g}	B_{2g}	A_{1g}
Intensité cas 2-4	–	4	–	–	16	–	–	–	5	–	–	–	–	–
Intensité » 1-3	12	3	2	7	9	t. f.	4	3,5	18	5	4	3	4	t. f
Intensité » 5-6	–	3	–	–	4	–	–	–	3	–	–	–	–	–

Ensembles	E_4		E_1		E_4							
Δν en cm⁻¹	851	860	1001	1027	1070	1115	1160	1165	1242	1250	1311	1346
Type	A_{1g}	A_{1g}	A_{1g}	A_{1g}	B_{2g}	B_{2g}	B_{2g}	A_{1g}	B_{2g}	B_{2g} ou B_{3g}	?	A_{1g}
Intensité cas 2-4	5	7	60	95	–	–	–	0	–	–	–	–
Intensité » 1-3	18	0	12	13	f.	f.	3	5	5	f.	t. f.	f.
Intensité » 5-6	2	2	21	16	–	–	–	3	–	–	–	–

(*) t.f, très faible; f, faible; m, moyenne; F, forte, T.F, très forte. Les cas correspondent à la notation définie dans [3]. Seule l'étude en lumière incidente polarisée a permis la séparation de raies proches de 1 ou 2 cm⁻¹.

Structure du cristal. — Une étude de ce cristal aux rayons X, faite par J. A. A. Ketelaar et non encore publiée par l'auteur, a révélé une structure cristalline assez complexe. Voici certains des résultats qui nous ont été aimablement communiqués par l'auteur : le groupe de symétrie du cristal est $Pbca = D_{2h}^{15}$; les dimensions de la maille sont $a = 8{,}21$ Å, $b = 9{,}53$ Å, $c = 19{,}1$ Å; le nombre de molécules dans la maille est $Z = 16$; il existe deux familles d'ions SO_4 sans relation de symétrie entre elles; elles comprennent chacune huit ions SO_4, qui ne possèdent plus aucun élément de symétrie.

Prévisions théoriques. — Avec une structure si complexe et encore mal connue, les prévisions en effet Raman ne peuvent porter que sur le nombre

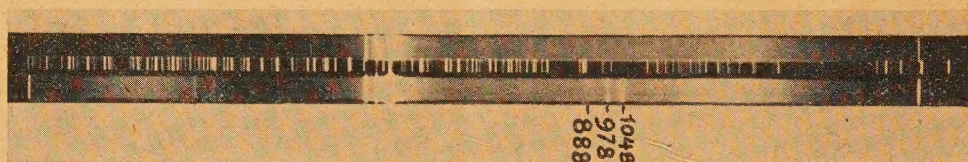
des raies, leur type de symétrie et leur position approximative dans le spectre. L'ion SO_4 libre possède, dans l'ordre des fréquences croissantes, une vibration double $\nu_2 = 451\ \text{cm}^{-1}$, une triple $\nu_3 = 613\ \text{cm}^{-1}$, une simple $\nu_1 = 981\ \text{cm}^{-1}$ et une triple $\nu_4 = 1104\ \text{cm}^{-1}$.

Dans le cristal, toute dégénérescence doit cesser; chaque ion SO_4 possède neuf vibrations simples qui couplées entre les huit ions d'une même famille, donnent chacune huit vibrations de la maille, dont quatre sont actives en effet Raman. Les raies se grouperont autour des quatre fréquences de l'ion libre en quatre ensembles, dont la composition théorique est la suivante :

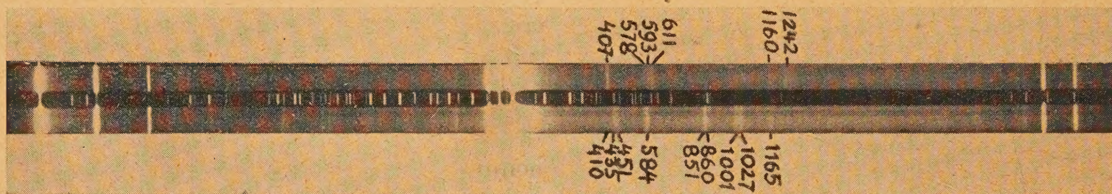
	Ensemble E_1.	Ensemble E_2.	Ensembles E_3 ou E_4.
Nombre de vibrations simples de l'ion	1	2	3
Nombre de vibrations actives pour une famille d'ions SO_4.	$1(A_{1g}, B_{1g}, B_{2g}, B_{3g})$	$2(A_{1g}, B_{1g}, B_{2g}, B_{3g})$	$3(A_{1g}, B_{1g}, B_{2g}, B_{3g})$

On doit doubler les nombres de ce tableau, puisqu'il existe deux familles d'ions SO_4.

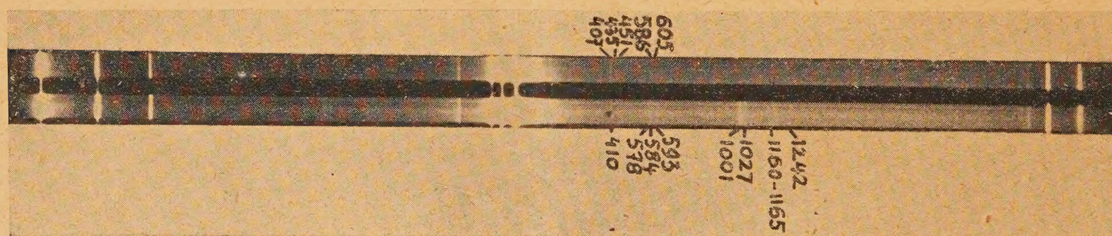
Discussion. — Nous n'avons pas trouvé dans les spectres de raies de basse fréquence, ni de bande caractéristique de la liaison O—H. Une telle bande a été signalée par Venkateswaran [9] dans le cristal de SO_4HK, mais elle est très faible et s'étend



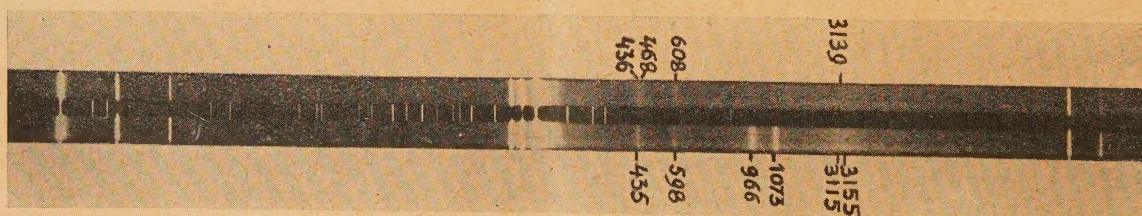
SO_4HK en solution 50 pour 100.



SO_4HK cristal cas 1.



SO_4HK cristal cas 6.



$(SO_4)_2H(NH_4)_3$ cristal OY//Ox.

Fig. 1.

sur 1000 cm^{-1}. Nous constatons cependant un relèvement du fond continu de nos spectres dans la région correspondante.

Toutes les raies sont assez fines, comme dans les sulfates neutres; le champ cristallin ne varie donc pas avec le temps. Il n'en est pas de même dans le spectre de PO_4H_2K par exemple [2].

Les deux fortes raies de type A_{1g} à 1001 et 1027 cm^{-1} doivent être attribuées aux pulsations en phase des ions de chacune des deux familles d'ions SO_4 de la maille. Dans l'ensemble E_1 provenant des couplages des pulsations des ions, les règles de symétrie permettent des raies d'autres types, mais l'intensité théorique de ces raies est nulle à l'approximation d'ordre zéro [3].

Ces deux familles d'ions ainsi mises en évidence, doit-on penser qu'elles sont constituées d'ions SO_4, d'ions SO_4H ou d'enchaînements complexes d'ions SO_4 reliés entre eux par des ions hydrogène ?

Pour mener à bien cette discussion, il nous faut étudier les faits déjà connus relatifs à ces ions. Les ions SO_4 ont une fréquence de pulsation qui peut varier de 982 cm^{-1} dans les solutions aqueuses ou dans certains cristaux hydratés, à 1015 cm^{-1} dans l'anhydrite, où l'ion Ca^{++} a une double charge et un petit rayon. Les ions SO_4H n'ont été étudiés jusqu'à présent que dans les solutions de sulfates acides ou d'acide sulfurique [7],]8], [10].

Dans ces solutions on attribue aux ions SO_4 et SO_4H d'après des études systématiques de variation d'intensité avec la concentration, les fréquences en cm^{-1} :

Ion SO_4 : 452, 617, 982 ($\rho = 0{,}03$);
Ion SO_4H : 417, 595, 895 ($\rho = 0{,}17$), 1034 à 1053 (1) ($\rho = 0{,}24$).

En particulier, les pulsations des ions SO_4 et SO_4H correspondent aux raies à 982 et 1034 à 1053 cm^{-1}. Les deux raies observées dans le spectre du cristal ont des fréquences intermédiaires entre ces fréquences. D'autre part elles ont une très grande anisotropie d'intensité, alors que dans le cas d'ions SO_4 non perturbés, elles devraient être de même intensité dans les différents cas d'étude.

Le spectre comprend de plus deux raies fines à 851 et 860 cm^{-1}, toutes deux de type A_{1g}. L'une d'elles, d'intensité très anisotrope, est si intense dans un des cas d'observation qu'elle dépasse en intensité les raies provenant de la pulsation (*fig.* 1). Comme elles ont des fréquences nettement différentes de toutes les fréquences de l'ion SO_4, la question de l'origine de ces raies se pose. Elles ne peuvent être attribuées à des vibrations de l'ensemble E_1, dont elles sont le plus proches, car cet ensemble est complet. Or, dans les solutions acides de sulfates se trouve une bande floue, à 895 cm^{-1} attribuée à l'ion SO_4H. Cette raie est polarisée et provient donc, comme les raies 851 et 860 cm^{-1} du cristal, d'une vibration totalement symétrique de l'ion. On peut penser que c'est la même vibration qui donne naissance à ces différentes raies dans les solutions et le cristal; on est ainsi conduit à admettre la présence d'ions SO_4H dans ce dernier.

(1) Selon la concentration.

Le schéma de cette vibration de l'ion SO_4H n'a jamais été donné. La pyramide SO_3OH, de symétrie C_{3v}, possède deux vibrations de valence totalement symétriques, la pulsation (*fig.* 2 A) et la

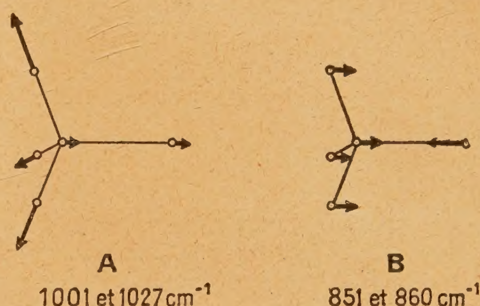


Fig. 2.

vibration affectant principalement le trait de valence $O_3S—OH$ (*fig.* 2 B); on peut leur attribuer respectivement les raies du cristal à 1001 et 1027 cm^{-1}, 851 et 860 cm^{-1}.

Si l'on se représente la structure réelle de l'ion SO_4 comme résultant d'une résonance entre un certain nombre de structures possibles [6], on peut penser qu'une structure telle que celle de la figure 3 sera

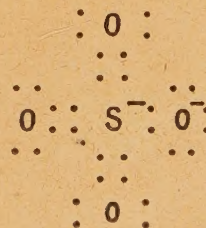


Fig. 3.

favorisée dans l'ion SO_4H; dans un tel ion, qui se dissocie en solution diluée, la liaison O—H doit avoir en effet un caractère principalement ionique. Cette structure comporte trois doubles liaisons covalentes S—O et une simple liaison covalente S—OH. On comprend alors que la vibration A de l'ion SO_4H ait une fréquence plus élevée et la vibration B une fréquence plus basse que celle de la pulsation de l'ion SO_4 qui résonne entre un certain nombre de structures possédant des simples et des doubles liaisons.

Les vibrations à 851 et 860 cm^{-1} proviennent, d'après cette attribution, de la cessation de dégénérescence des vibrations triplement dégénérées de valence, produite par l'abaissement de la symétrie de l'ion; elles doivent donc être rattachées à l'ensemble E_4. Une cessation de dégénérescence correspondant à une si grande variation de fréquence $\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} = 0{,}2\right)$ ne peut s'expliquer que par un remaniement profond des forces de valence, tel que celui que nous avons indiqué, et qui provient d'une cessation partielle de résonance.

Dans chacun des ensembles E_2, E_3 et E_4, on trouve moins de raies que la théorie n'en prévoit. Les fréquences des vibrations de déformation des ions sulfates sont, dans les sulfates acides de potassium, nettement plus basses que dans les sulfates neutres cristallisés, ainsi que le sont les fréquences de l'ion SO_4H (417 et 595) relativement à celles de l'ion SO_4 en solution (452 et 617) Il est d'ailleurs impossible de distribuer les raies trouvées selon les deux familles d'ions SO_4 de la maille.

L'ensemble E_4, très étalé dans tous les sulfates cristallisés et peu visible en solution, ne permet pas de comparaison nette. Disons cependant que les différences extrêmes entre les fréquences des raies d'un même ensemble croissant avec la fréquence moyenne de l'ensemble indiquent une perturbation des ions sulfate portant surtout sur les forces de valence.

Conclusion. — Les deux familles d'ions sulfate de la maille sont nettement mises en évidence par l'apparition de deux raies de pulsation. L'élévation de la fréquence de pulsation, l'abaissement de la fréquence des vibrations de déformation, relativement aux fréquences correspondantes de l'ion SO_4, et l'apparition de raies vers 850 cm^{-1} sont en faveur de l'existence d'ions SO_4H nettement individualisés dans le cristal. Cette étude a permis de préciser la nature de la perturbation apportée par l'hydrogène acide à l'ion SO_4.

Sulfates acides d'ammonium.

On ne connaît pas de sulfate acide d'ammonium isomorphe du sulfate acide de potassium. Les spectres que nous avons faits sont relatifs aux cristaux suivants :

1. $SO_4H\,NH_4$. *Orthorhombique* [5] et [4, p. 314]. — Ce cristal étant très difficile à obtenir et déliquescent, nous n'avons fait qu'un seul spectre de Raman, sans donner au cristal une orientation connue. Les raies obtenues dans un fond continu très intense sont données dans le Tableau II. Si, comme on peut le penser, les trois raies, d'intensité comparable, à 986, 1009 et 1038 cm^{-1} sont des raies de pulsation, elles indiquent la présence de trois familles différentes d'ions sulfate dans la maille cristalline, dont l'une est certainement formée d'ions SO_4. Les raies à 796 et 876 cm^{-1} peuvent être attribuées à des vibrations de valence SO_3—OH. La structure de ce cristal se révèle donc comme étant fort complexe.

Tableau II.

Sulfate acide d'ammonium SO_4HNH_4.

Ensembles.....	E_2.		E_3.		E_4 ?		E_1 ?		
$\Delta\nu$ en cm^{-1}	417	447	574	612	796	876	986	1009	1038
Intensité.............	f.	f.	f.	f.	t. f.	f.	m.	m.	m.

Tableau III.

Sulfate acide d'ammonium $(SO_4)_2H(NH_4)_3$.

Ensembles.....	E_2.			E_3.		E_1.		E_4.	(NH_4).		
$\Delta\nu$ en cm^{-1}	435	436	468	598	608	966	1073	~ 1113	~ 3115	~ 3139	~ 3155
Type..................	A_g	B_g	B_g	A_g	B_g	A_g	A_g	B_g	A_g	B_g	A_g et B_g
Intensité cas OY//Ox.	12	9	f.	7	6	19	22	5	13	7	20

2. $(SO_4)_2H\,(NH_4)_3$. *Monoclinique* [5] et [4, p. 317]. — Nous avons obtenu ce cristal sous forme de belles plaques cristallines parfaitement limpides. Les spectres ont été fait dans une seule orientation du cristal qui permet de classer les raies selon les deux types de symétrie [1]; l'axe binaire du cristal était orienté selon la direction d'éclairement. Les résultats sont donnés dans le Tableau III et figure 1 C.

Les deux fortes raies à 966 et 1073 cm^{-1} doivent correspondre aux pulsations des ions sulfate. Elles indiquent la présence de deux familles d'ions sulfate dans la maille. La raie à 966 cm^{-1} peut être attribuée à une famille d'ions SO_4 et celle à 1073 cm^{-1} à une famille d'ions SO_4H, bien qu'elles soient respectivement plus basse et plus élevée que toutes les fréquences de pulsation connues de ces ions. Il est

cependant surprenant, si la maille contient des ions SO_4H, de ne pas trouver de raie voisine de 880 cm^{-1}.

En conclusion, on voit sur ces exemples que l'effet Raman peut apporter des renseignements intéressants sur la structure des cristaux, en dehors de toute étude aux rayons X. Dans un cristal possédant des ions complexes, en particulier, on peut déterminer le nombre de familles de symétrie distinctes de la maille et étudier les perturbations de ces ions dans le cristal.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. CABANNES, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1940, **211**, p. 625.
[2] J. CHAPELLE, *Thèse*. Paris, 1949.
[3] L. COUTURE, *Ann. de Physique*, 1947, **2**, p. 5.
[4] GROTH, *Chemische Krystallographie II*, Leipzig, 1908.
[5] Ch. DE MARIGNAC, *Annales des Mines*, 1856, **9**, p. 6.
[6] L. PAULING, *The Nature of Chemical Bond*, *Cornell Univ. Press*, 1944, p. 239.
[7] W. H. SHAFFER et D. M. CAMERON, *J. Chem. Phys.*, 1936, **4**, p. 92.
[8] C. S. VENKATESWARAN, *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1936, A **4**, p. 174.
[9] C. S. VENKATESWARAN, *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1938, A **7**, p. 13.
[10] L. A. WOODWARD et R. G. HORNER, *Proc. Roy. Soc.*, London, 1934, A **144**, p. 129.

LA MÉSODÉSINTÉGRATION DU DEUTÉRON

Par C. MARTY.
Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.
et J. PRENTKI.
Institut Henri-Poincaré.

Sommaire. — On étudie la capture de mésons π de faible vitesse par le deutéron à l'aide de la théorie symétrique mixte de Möller et Rosenfeld. Sont envisagés successivement la capture d'un méson libre, positif, négatif ou neutre, puis l'absorption d'un méson négatif à partir d'une orbite K. Les résultats obtenus confirment les estimations publiées antérieurement par divers auteurs. En ce qui concerne l'importance relative de ces deux modes d'absorption, les valeurs numériques des sections efficaces ou des probabilités de capture sont données dans le cas d'une masse $m_\pi = 286\,m_0$. On discute avec quelques détails la possibilité de mise en évidence d'un méson π neutre par la dissociation du deutéron.

1. **Introduction.** — Les expériences de Berkeley [1], faites avec le cyclotron de 184 inches ont permis d'obtenir en quantités appréciables des mésons artificiels et rendent possible une étude précise des propriétés de ces particules. Il est maintenant démontré que l'on a surtout affaire aux mésons lourds π de Powell [2], dont la masse est $286 m_0$ (m_0 masse au repos de l'électron) ([1]). Le mode de création de ces corpuscules semble indiquer que les mésons π sont responsables des forces nucléaires.

Il est donc intéressant d'étudier de plus près l'interaction des mésons π avec les noyaux atomiques et en particulier, comme il a été dit ailleurs [3] l'absorption des mésons lourds par la matière nucléaire. Le problème, jusqu'à présent, n'a été traité que de façon approximative [4], puisqu'on ne connaît pas les fonctions d'onde des noyaux complexes. Toutefois la théorie actuelle du deutéron semble assez bien fondée, et en dépit des difficultés que l'on rencontre [5], on peut essayer de traiter cette question d'une façon beaucoup plus complète que précédemment. Ceci a d'autant plus d'intérêt qu'il est permis d'envisager une vérification expérimentale de la théorie.

On peut s'imaginer la capture d'un méson par le deutéron de la façon suivante : la particule incidente est absorbée par l'un des deux nucléons du noyau en cédant son énergie totale à ce dernier. Le deutéron est alors dissocié et l'on observera, du moins en principe, l'un des trois cas suivants (fig. 1) ce phénomène est l'analogue mésique de la photodésintégration du deutéron, on l'appellera la *mésodésintégration du deutéron*.

([1]) *Note sur épreuves.* — Contrairement aux calculs effectués dans [3] nous avons adopté la dernière valeur expérimentale $286 m_0$ pour la masse du méson et non $m_\pi = 313 m_0$.

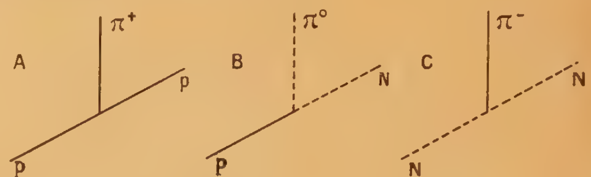


Fig. 1.

Le processus A de la figure 1 est le plus facile à étudier du point de vue expérimental, car toutes les particules mises en jeu sont ionisantes. Cependant, il faut remarquer que quel que soit le mode de production des mésons π positifs, on ne les observe, en général, qu'aux basses énergies où la section efficace d'absorption est extrêmement faible en raison de la répulsion coulombienne [6], le phénomène prépondérant est alors la désintégration $\pi - \mu$.

Le processus B est lié à l'existence d'un méson neutre suffisamment stable et il est assez ardu à déceler puisqu'on ne voit ni la particule incidente, ni le neutron projeté. Son intérêt n'en est pas moins grand puisque c'est un procédé qui, en principe, peut donner des indications sur le méson neutre. Des remarques analogues sont valables pour l'éventualité C où seul le méson initial est visible. Deux modes d'absorption distincts sont alors en compétition : 1° le méson π^- libre est absorbé directement; 2° le méson π^-, très rapidement freiné par son passage dans la matière [7], est d'abord amené à

décrire une orbite stable autour du deutéron et ensuite capturé par ce noyau. On sait, et l'on vérifiera ici, que c'est le second type d'absorption qui est prépondérant.

Une discussion plus détaillée des cas ci-dessus sera donnée dans la conclusion (§ 6).

Dans ce travail nous allons étudier l'absorption de mésons *lents*, libres ou liés, par le deutéron (§ 3, 4). Il nous sera nécessaire de rappeler auparavant certaines propriétés générales du système neutron-proton.

2. Rappels sur la théorie du deutéron. — Les fonctions d'onde d'un système de deux nucléons liés par un opérateur d'interaction V sont les fonctions propres de l'hamiltonien

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} + V, \qquad (1)$$

où les indices entre parenthèses caractérisent chacun des nucléons et où

$$H^{(i)} = \vec{\alpha}^{(i)}\vec{p}^{(i)} + \rho_3^{(i)} Mc \qquad (i = 1, 2),$$

$\vec{\alpha}$ et ρ_3 sont les matrices habituelles de Dirac, M la masse (supposée unique) du proton et du neutron, $p^{(i)}$ le moment de la $i^{\text{ième}}$ particule.

L'opérateur (1) prend une forme particulièrement simple dans le système lié au centre de gravité, c'est-à-dire tel que les coordonnées $\vec{r}^{(i)}$ des deux nucléons vérifient la relation

$$\vec{r}^{(1)} + \vec{r}^{(2)} = 0. \qquad (2)$$

On posera en outre

$$\vec{r} = \vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}. \qquad (3)$$

Kemmer [8] a montré qu'en raison de l'invariance de l'hamiltonien (1) par rapport au groupe des rotations et des retournements, les fonctions propres cherchées peuvent se classer en trois catégories aisément repérables à l'approximation non relativiste

I *a*		état triplet $l = j \pm 1$,
I *b*	approximation non relativiste	» $l = j$,
II *b*		état singulet $l = j$.

De plus on peut en première approximation mettre les fonctions propres de l'ensemble de deux nucléons sous la forme

$$\Psi = \overset{(0)}{\Psi} + \overset{(1)}{\Psi}, \qquad (4)$$

où $\overset{(0)}{\Psi}$ est indépendant de la vitesse v des nucléons (grande composante) tandis que $\overset{(1)}{\Psi}$ est en v/c (petite composante).

Pour expliciter les fonctions $\overset{(0)}{\Psi}$ et $\overset{(1)}{\Psi}$, on introduira les fonctions propres des opérateurs suivants :

$$\left.\begin{aligned} &a.\ \tfrac{1}{2}(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}) \text{ lié au spin total du système,} \\ &b.\ \tfrac{1}{2}(\tau_3^{(1)} + \tau_3^{(2)}) \text{ lié au spin isotopique total du système,} \\ &c.\ \tfrac{1}{2}(\rho_3^{(1)} + \rho_3^{(2)}). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Dans ce qui suit, on adoptera les notations de Rosenfeld [*Nuclear Forces* (¹)], en particulier en ce qui concerne l'emploi des variables *dichotomiques* (c'est-à-dire ayant deux valeurs propres ± 1). Par exemple les fonctions propres ${}^{\sigma}(\sigma)_m$ de l'opérateur (5 *a*) sont construites à l'aide des deux fonctions propres $v_+(i)$ et $v_-(i)$ correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 de chacune des observables $\sigma_z^{(i)}$. Les fonctions propres normées de l'opérateur (5 *a*) s'écrivent (N. F. p. 55).

TABLEAU I.

Multiplicité de l'état σ.	Valeur propre de (5 *a*) m.	Fonction propre correspondante ${}^{\sigma}(\sigma)_m$.
Triplet $\sigma = 3$.	0	${}^3(\sigma)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[v_+(1)\,v_-(2) + v_-(1)\,v_+(2)]$
	1	${}^3(\sigma)_1 = v_+(1)\,v_+(2)$
	-1	${}^3(\sigma)_{-1} = v_-(1)\,v_-(2)$
Singulet $\sigma = 1$.	0	${}^1(\sigma)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[v_+(1)\,v_-(2) - v_-(1)\,v_+(2)]$

Les fonctions propres des opérateurs (5 *b*) (5 *c*) s'obtiennent de la même façon à partir des variables dichotomiques $\tau_3^{(i)}$ et $\rho_3^{(i)}$, nous les écrirons ${}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}$ et ${}^{\rho}(\rho)_{m_\rho}$. Rappelons en outre que l'opérateur (5 *c*) sert à distinguer les grandes composantes $\overset{(0)}{\Psi}$ des petites $\overset{(1)}{\Psi}$: $\overset{(0)}{\Psi}$ correspond au vecteur propre ${}^3(\rho)_1$ et $\overset{(1)}{\Psi}$ aux vecteurs ${}^3(\rho)_0$ et ${}^1(\rho)_0$.

Un état du deutéron sera alors caractérisé par son moment total j et la projection m de celui-ci. En outre, on définira le moment orbital l et la multiplicité σ (triplet $\sigma = 3$, singulet $\sigma = 1$ (*cf.* tableau I). L'état de charge des nucléons sera indiqué par les fonctions propres ${}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}$.

Les fonctions d'onde du deutéron s'écrivent en coordonnées polaires, pour les grandes composantes :

$$\overset{(0)}{\Psi} = {}^3(\rho)_1\, {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}\, {}^{\sigma}Z_j^{(l)m}(\theta, \varphi, \sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)})\, \frac{{}^{\sigma}R_{\tau}^{(l)}(r)}{r}, \qquad (6)$$

où ${}^{\sigma}R_{\tau}^{(l)}$ est une fonction propre de l'équation de Schrödinger :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{M}\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r}\right] + {}^{\sigma}V_{\tau}^{(l)}(r)\right\} {}^{\sigma}R_{\tau}^{(l)} = {}^{\sigma}E_{\tau}^{(l)}\, {}^{\sigma}R_{\tau}^{(l)}, \qquad (7)$$

(¹) *North-Holland Pub. C°*, 1948, dans la suite on indiquera les références à cet ouvrage par l'abréviation N. F.

${}^{\sigma}V_{\tau}^{(l)}(r)$ est le potentiel *central* d'interaction pour l'état du système de deux nucléons dont l'énergie a pour valeur propre ${}^{\sigma}E_{\tau}^{(l)}$.

Les fonctions ${}^{\sigma}Z_j^{(l)m}$ dépendent à la fois de la multiplicité σ de l'état envisagé et des variables angulaires θ, φ par l'intermédiaire des fonctions sphériques Y_l^m de Laplace. On peut les écrire sous la forme (N. F., p. 56) :

État singulet :

$$ {}^{1}Z_l^{(l)m} = {}^{1}(\sigma)_0\, Y_l^m, \tag{8 a} $$

État triplet :

$$ \left.\begin{aligned} {}^{3}Z_l^{(l)m} &= \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}}\Big[\sqrt{2}\, m\, {}^{3}(\sigma)_0\, Y_l^m + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_1\, Y_l^{m-1} - \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_{-1}\, Y_l^{m+1}\Big],\\ {}^{3}Z_{l+1}^{(l)m} &= \frac{1}{\sqrt{2(l+1)(2l+1)}}\Big[\sqrt{2(l+m+1)(l-m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_0\, Y_l^m - \sqrt{(l+m)(l+m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_1\\ &\qquad \times Y_l^{m-1} - \sqrt{(l-m)(l-m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_{-1}\, Y_l^{m+1}\Big],\\ {}^{3}Z_{l-1}^{(l)m} &= \frac{1}{\sqrt{2l(2l+1)}}\Big[\sqrt{2(l+m)(l-m)}\, {}^{3}(\sigma)_0\, Y_l^m + \sqrt{(l-m)(l-m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_1\\ &\qquad \times Y_l^{m-1} + \sqrt{(l+m)(l+m+1)}\, {}^{3}(\sigma)_{-1}\, Y_l^{m+1}\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{8 b} $$

Les fonctions ${}^{\sigma}Z_j^{(l)m}$ ci-dessus forment un système orthonormé.

Les petites composantes $\overset{(1)}{\Psi}$ du deutéron correspondront aux vecteurs propres ${}^{3}(\rho)_0$ et ${}^{1}(\rho)_0$. On les obtient à l'aide de l'opérateur différentiel $\mathcal{D}_j$:

$$ \mathcal{D}_j = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}\, Mc}\,\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{j}{r}\right]. $$

Elles s'écrivent (N. F., p. 60-61) :

État singulet :

$$ \overset{(1)}{\Psi} = {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}\, {}^{3}(\rho)_0 \left[\sqrt{\frac{l}{2l+1}}\, {}^{3}Z_l^{(l-1)m}\, \mathcal{D}_{-l} + \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\, {}^{3}Z_l^{(l+1)m}\, \mathcal{D}_{l+1}\right] {}^{1}R_{\tau}^{(l)}. \tag{9 a} $$

État triplet :

$$ \left.\begin{aligned} l = j, &\quad \overset{(1)}{\Psi} = {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}\, {}^{1}(\rho)_0 \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, {}^{3}Z_j^{(j-1)m}\, \mathcal{D}_{-j} - \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, {}^{3}Z_j^{(j+1)m}\, \mathcal{D}_{j+1}\right] {}^{3}R_{\tau}^{(j)},\\ l = j-1, &\quad \overset{(1)}{\Psi} = {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}\left[\ {}^{1}(\rho)_0 \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, {}^{3}Z_j^{(j)m} + {}^{3}(\rho)_0 \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, {}^{1}Z_j^{(j)m}\right] \mathcal{D}_j\, {}^{3}R_{\tau}^{(j-1)},\\ l = j+1, &\quad \overset{(1)}{\Psi} = {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}\left[-{}^{1}(\rho)_0 \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, {}^{3}Z_j^{(j)m} + {}^{3}(\rho)_0 \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, {}^{1}Z_j^{(j)m}\right] \mathcal{D}_{-(j+1)}\, {}^{3}R_{\tau}^{(j+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{9 b} $$

L'état fondamental du deutéron peut être regardé comme ${}^{3}S_1$ pur; sa fonction d'onde s'écrit, en négligeant la contribution du premier ordre des vitesses :

$$ \Psi_i = \overset{(0)}{\Psi}_i = {}^{1}(\tau)_0\, {}^{3}(\rho)_1 (-1)^m\, {}^{3}(\sigma)_0\, Y_0^0\, \frac{{}^{3}R^0}{r}. \tag{10} $$

Dans le cadre de la théorie des forces nucléaires de Möller et Rosenfeld [9] qui sera adopté ici, on peut expliciter ${}^{3}R^0$ sous la forme [10]

$$ {}^{3}R^0 = \sqrt{\rho\varkappa}\, e^{-\beta\varkappa r}\left[(1 - e^{-\varkappa r}) - C_1 (1 - e^{-\varkappa r})^2\right], \tag{11} $$

où $\varkappa$ est la masse réduite du méson π ($\hbar = 1$, $c = 1$) $\varkappa = \frac{m_\pi c}{\hbar}$ et où β est une constante sans dimensions liée à l'énergie de l'état ${}^{3}S_1$

$$ \beta = \frac{\varkappa_N}{\varkappa}\left(\frac{E_0}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}, $$

E_0 énergie de liaison du deutéron dans l'état fondamental.

$\varkappa_N$, masse réduite du nucléon;

ρ, facteur de normalisation;

C_1 nombre sans dimensions.

Comme nous n'étudierons ici que la capture de mésons lents, l'énergie du deutéron dans l'état final est pratiquement égale à la masse au repos m_π c'est-à-dire de l'ordre de 145 MV. A de telles énergies les nucléons peuvent être regardés comme libres; l'équation (7) se simplifie et permet d'exprimer les fonctions radiales ${}^{\sigma}R_f^{(l)}$ à l'aide des fonctions de Bessel d'indice demi-entier.

$$ {}^{\sigma}R_f^{(l)} = R_f^{(l)} = \lambda \sqrt{Kr}\, J_{l+\frac{1}{2}}(Kr), \tag{12} $$

K moment réduit de chacun des nucléons.

$$ \lambda = \sqrt{\frac{M}{2\hbar^2 K}}. $$

3. Capture d'un méson libre par le deutéron. — *a.* GÉNÉRALITÉS. — Le cas que nous étudions maintenant intéresse surtout les mésons neutres, puisque l'on sait (cf. Introduction) que pour des particules chargées d'autres phénomènes ont lieu. Toutefois, afin d'être complets, nous calculerons par la méthode d'Araki et de Tomonaga [6] l'ordre de grandeur des sections efficaces de capture de mésons chargés libres.

Nous décrirons l'interaction des mésons avec le champ par la théorie symétrique mixte de Möller et Rosenfeld [9], qui fait intervenir des mésons vectoriels et pseudoscalaires. On aura pour hamiltonien d'interaction une partie H indépendante des vitesses

$$H = \int \left[-\frac{1}{\varkappa^2} \mathbf{N} \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{S}} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{P}} \operatorname{grad} \Psi \right] dv \quad (13\,a)$$

et un terme H' en v/c

$$H' = -\int \left(\vec{\mathbf{M}}\,\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{T}}\,\vec{\mathbf{F}} + \mathbf{R}\Psi + \mathbf{Q}\Phi \right) dv. \quad (13\,b)$$

Les grandeurs canoniquement conjuguées $\left(\vec{\mathbf{U}}, -\vec{\mathbf{F}}\right)$, (Ψ, Φ) décrivent respectivement les champs mésiques vectoriels et pseudo-scalaires. Outre leur caractère scalaire ou vectoriel relatif à l'espace ordinaire, on se rappellera que toutes ces grandeurs sont des vecteurs d'un espace symbolique à trois dimensions où opèrent les observables de spin isotopique. Les sources $\vec{\mathbf{M}}$, $\mathbf{N}$, $\vec{\mathbf{S}}$, $\vec{\mathbf{T}}$, $\vec{\mathbf{P}}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sont déduites du mouvement des nucléons :

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\mathbf{M}} &= g_1 \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \vec{\alpha}^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \\
\mathbf{N} &= g_1 \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \\
\vec{\mathbf{S}} &= \frac{g_2}{\varkappa} \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \rho_2^{(i)} \vec{\sigma}^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \\
\vec{\mathbf{T}} &= -\frac{g_2}{\varkappa} \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \rho_2^{(i)} \vec{\sigma}^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \qquad (i = 1, 2). \\
\vec{\mathbf{P}} &= \frac{f_2}{\varkappa} \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \vec{\sigma}^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \\
\mathbf{Q} &= \frac{f_2}{\varkappa} \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \rho_1^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right) \\
\mathbf{R} &= f_1 \sum_i \boldsymbol{\tau}^{(i)} \rho_2^{(i)} \delta\left(\vec{r} - \vec{r}^{(i)}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

où $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, $\vec{\sigma}^{(i)}$ sont les matrices de Dirac du $i^{\text{ième}}$ nucléon, dont le vecteur spin isotopique est $\tau^{(i)}$. f_1, f_2, g_1, g_2 sont les constantes de couplage nucléons mésons π.

La section efficace de capture d'un méson de vitesse v_π par un deutéron, avec projection de nucléons de vitesse relative v dans l'angle solide $d\Omega$ est (N. F., p. 132) :

$$dS = \frac{v}{v_\pi} \overline{\Sigma \,|\, \Psi(\infty) \,|^2}\, r^2 \, d\Omega, \quad (15)$$

où la sommation est étendue aux fonctions propres asymptotiques $\Psi(\infty)$ des états finaux possibles du deutéron, la barre indiquant une moyenne sur la dégénérescence de l'état initial.

On démontre que la grande composante (*cf.* N. F., p. 133 et [11]) $\overset{(0)}{\Psi}(\infty)$ s'écrit sous la forme

$$\overset{(0)}{\Psi}(\infty) = {}^3(\rho)_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar v}} \frac{e^{iKr}}{r} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \sum_{\sigma, l, j, m} {}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}$$
$$\times {}^{\sigma}Z_j^{(l)m} \frac{e^{i\,{}^{\sigma}\delta_l}}{i^l} (E;\, \sigma,\, l,\, j,\, m \,|\, H + H' \,|\, 0), \quad (16)$$

où E est l'énergie finale du deutéron et $(E, \sigma, l, j, m, | H + H' | 0)$ l'élément de matrice correspondant à une transition entre l'état fondamental 0 et l'état final E, σ, l, j, m. On a une expression analogue pour la petite composante.

b. MÉSON PSEUDOSCALAIRE NEUTRE. — Dans le cas de mésons neutres, les grandeurs conjuguées décrivant le champ peuvent être décomposées en séries de Fourier ($\vec{k}$, ε_k respectivement moment et énergie totale réduits des mésons)

$$\left.\begin{aligned}
\Psi &= \sqrt{\frac{\hbar c}{2}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \left[a\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^+\left(\vec{k}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right], \\
\Phi &= -i\sqrt{\frac{\hbar c}{2}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\varepsilon_k} \left[a\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\vec{r}} - a^+\left(\vec{k}\right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right].
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Les hamiltoniens H et H' prennent alors, compte tenu de (13 *a*, *b*) (14) et (17), la forme :

$$H = -i \frac{f_2}{\varkappa} \sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}} \sum_{i=1,2} \tau_3^{(i)} \vec{k}\, \vec{\sigma}^{(i)} e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}},$$

$$H' = \sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}} \sum_{i=1,2} \tau_3^{(i)} \left(f_1 \rho_2^{(i)} + i f_2 \frac{\varepsilon}{\varkappa} \rho_1^{(i)} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}}.$$

Nous pouvons supposer sans changer la généralité des calculs que le moment $\vec{k}$ est parallèle à l'axe des Z. Tenant compte, d'autre part, de la forme de la fonction d'onde de l'état initial du deutéron et des propriétés d'orthogonalité des fonctions ${}^{\tau}(\tau)_{m_\tau}$ on voit que les seuls états finaux possibles après application des hamiltoniens ci-dessus, sont du type ${}^3(\tau)_0$.

Considérons maintenant de façon séparée les opérateurs H et H'. En ce qui concerne l'hamiltonien H, l'absence de matrices $\rho^{(i)}$ montre que la fonction d'onde « ρ » finale est du type grande composante ${}^3(\rho)_1$. Les opérateurs $\sigma_z^{(i)}$ qui interviennent alors donnent, comme on le vérifie facilement :

$$H\Psi_i = -i \frac{f_2}{\varkappa} \sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}} \frac{k}{\sqrt{4\pi}} \frac{{}^3R^0}{r} \left\{ \begin{aligned}
&\left(e^{i\vec{k}\vec{r}^{(1)}} + e^{i\vec{k}\vec{r}^{(2)}}\right) {}^1(\sigma)_0, && m_i = 0, \\
-&\left(e^{i\vec{k}\vec{r}^{(1)}} - e^{i\vec{k}\vec{r}^{(2)}}\right) {}^3(\sigma)_1, && m_i = +1, \\
&\left(e^{i\vec{k}\vec{r}^{(1)}} - e^{i\vec{k}\vec{r}^{(2)}}\right) {}^3(\sigma)_{-1}, && m_i = -1,
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(m_i nombre quantique magnétique initial).

Compte tenu des relations (2) et (3), on voit qu'il y a une infinité d'états possibles susceptibles de se combiner à (18) pour donner des éléments de matrice non nuls à cause de l'orthogonalité des fonctions sphériques et des fonctions ${}^{\sigma}(\sigma)_m$. On les obtiendrait par exemple en développant en série de fonctions sphériques les quantités $\cos\left(\frac{\vec{k}\,\vec{r}}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\vec{k}\,\vec{r}}{2}\right)$. Toutefois, puisque nous nous bornons ici à la capture de mésons *lents* par le deutéron, nous nous arrêterons aux termes du premier degré en k dans ce développement, cette façon d'opérer étant justifiée un peu plus loin. Les seuls états finaux possibles sont alors du type ${}^1S_0$, ${}^3P_1$ et ${}^3P_2$ avec pour éléments de matrice :

$$\left.\begin{aligned}
({}^1S_0|H|0) &= -2i\frac{f_2}{\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,kI, && 0\to 0,\\
({}^3P_1|H|0) &= -\frac{f_2}{\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2I'\frac{1}{\sqrt{6}}, && \pm 1\to\pm 1,\\
({}^3P_2|H|0) &= \frac{f_2}{\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2I'\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{6}}, & +1\to+1,\\[2mm] -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, & -1\to-1.\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Les flèches indiquent les différents nombres quantiques magnétiques possibles pour les transitions envisagées, de plus

$$\left.\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty R_f^{(0)}R_i^{(0)}\,\mathrm{d}r,\\
I' &= \int_0^\infty R_f^{(1)}R_i^{(0)}\,r\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Si l'on adopte pour la fonction radiale initiale ${}^3R_i^{(0)}$ l'expression (11), on pourra en utilisant (12) expliciter les intégrales I et I' à l'aide d'expressions sans dimensions P_n (cf. [11]).

$$P_n = \left[1+(\beta+n)^2\frac{\varkappa^2}{K^2}\right]^{-1}\quad(n\text{ entier}).\quad(21)$$

On trouve :

$$\left.\begin{aligned}
I &= \frac{\lambda}{K}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{(1-C_1)P_0-(1-2C_1)P_1-C_1P_2\}\\
&= \frac{\lambda}{K}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{\mathrm{I}\},\\
I' &= \frac{2\lambda}{K^2}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{(1-C_1)P_0^2-(1-2C_1)P_1^2-C_1P_2^2\}\\
&= \frac{2\lambda}{K^2}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{\mathrm{II}\},
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Remarquons que c'est la présence d'exponentielles $e^{-(\beta+n)\varkappa r}$ dans les intégrales (20) qui rend possible l'approximation faite à propos des développements en série de (18); seul, en effet, le domaine voisin de l'origine apporte une contribution appréciable aux intégrales I et I'.

Les calculs se rapportant à l'opérateur H' seront conduits de la même façon que ci-dessus; les seules différences notables sont l'apparition des « petites composantes » ${}^3(\rho)_0$ et ${}^1(\rho)_0$ et des opérateurs $\mathcal{O}_j$ par (9 *a*, *b*). Les états finaux possibles sont du type ${}^1S_0$, ${}^1D_2$, ${}^3P_1$ avec pour éléments de matrice de transition :

$$\left.\begin{aligned}
({}^1S_0|H'|0) &= -i\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{kK}{\varkappa_N}\,I'\frac{1}{6}, && 0\to 0,\\
({}^1D_2|H'|0) &= -i\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{kK}{\varkappa_N}\,I'\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{5}}, & 0\to 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{15}}, & \pm1\to\pm1.\end{cases}\\
({}^3P_1|H'|0) &= \left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{K}{\varkappa_N}\,I\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{3}}, & 0\to 0,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{2}{3}}, & \pm1\to\pm1,\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Les éléments de matrice (19) et (23), joints aux égalités (15) et (16) donnent les sections efficaces élémentaire et totale de mésodésintégration du deutéron par un méson neutre pseudoscalaire. En raison de l'orthogonalité des fonctions ${}^{\sigma}Z_j^{(l)m}$ on a immédiatement pour la section efficace totale

$$S_{ps} = \frac{16\pi}{3}\rho\frac{f_2^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa_N}{\varepsilon}\frac{k}{K^3}\left\{\{\mathrm{I}\}^2+\frac{2}{3}\frac{k^2}{K^2}\{\mathrm{II}\}^2\right\}$$
$$+\frac{4\pi}{3}\rho\frac{\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon\varkappa_N}\frac{K}{k}\left\{\{\mathrm{I}\}^2+\frac{1}{6}\frac{k^2}{K^2}\{\mathrm{II}\}^2\right\}\quad(24\,a)$$

[les expressions $\{\mathrm{I}\}$ et $\{\mathrm{II}\}$ sont définies en (22)]. La section efficace différentielle est :

$$\mathrm{d}S_{ps} = \frac{4}{3}\rho\frac{f_2^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa_N}{\varepsilon}\frac{k}{K^3}\{\mathrm{I}\}^2$$
$$+\frac{1}{3}\rho\frac{\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa}{\varepsilon\varkappa_N}\frac{K}{k}\{\mathrm{I}\}^2\ (^2).\quad(24\,b)$$

(²) Nous ne tenons pas compte dans cette expression des termes en $\{\mathrm{II}\}^2$ qui, en raison du facteur $\frac{k^2}{K^2}$ très petit pour les énergies considérées, sont négligeables devant les termes en $\{\mathrm{I}\}^2$ (cf. § 5).

c. Méson vectoriel neutre. — Les calculs sont en tous points analogues à ceux du paragraphe *b*.

On décompose les variables conjuguées $\vec{U}$ et $\vec{F}$ en séries de Fourier :

$$\vec{U}=\sqrt{\frac{\hbar c}{2}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}}\sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j(\vec{k})\left(\frac{\varepsilon_k}{\varkappa}\right)^{\delta_{j3}} \times\left[a(\vec{k},j)\,e^{i\vec{k}\vec{r}}+a^+(\vec{k},j)\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right],$$

$$\vec{F}=i\sqrt{\frac{\hbar c}{2}}\sum_k \sqrt{\varepsilon_k}\sum_{j=1}^{3}\vec{e}_j(\vec{k})\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon_k}\right)^{\delta_{j3}} \times\left[a(\vec{k},j)\,e^{i\vec{k}\vec{r}}-a^+(\vec{k},j)\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right].$$

L'indice j permet de distinguer les mésons transversaux ($j=1,2$) des mésons longitudinaux ($j=3$).

Pour un méson de moment et énergie réduits $\vec{k}$, ε, les hamiltoniens d'interaction (13 *a*, *b*) s'écrivent :

α, *méson longitudinal*

$$\left.\begin{aligned}H_{//}&=\frac{g_1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k\sum_{i=1,2}\tau_3^{(i)}\,e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}},\\ H'_{//}&=-\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\sum_{i=1,2}\tau_3^{(i)}\sigma_z^{(i)}\left(g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho_1^{(i)}-ig_2\rho_2^{(i)}\right)e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}}.\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

β, *méson transversal*

$$\left.\begin{aligned}H_{\perp}&=i\frac{g_2}{\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\sum_{i=1,2}\tau_3^{(i)}\rho_3^{(i)}\vec{\sigma}^{(i)}\left(\vec{k}\wedge\vec{e}_j\right)e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}},\\ H'_{\perp}&=-\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\sum_{i=1,2}\tau_3^{(i)}\sigma_x^{(i)}\left(g_1\rho_1^{(i)}-ig_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\rho_2^{(i)}\right)e^{i\vec{k}\vec{r}^{(i)}}.\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Le tableau ci-après contient les différents états finaux possibles pour les opérateurs (25) et (26), ainsi que les éléments de matrice des transitions correspondantes.

Les sections efficaces de mésodésintégration sont pour un méson vectoriel neutre :

α, *longitudinal*,

$$\left.\begin{aligned}S_{//}&=\frac{16\pi}{3}\rho\frac{g_1^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa_N k^3}{\varepsilon K^5}\{\mathrm{II}\}^2+\frac{4\pi}{3}\rho\frac{\left(g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}+g_2\right)^2}{4\pi\hbar c}\times\frac{\varkappa^2}{\varepsilon\varkappa_N^3}\frac{K}{k}\left[\frac{7}{6}\{\mathrm{I}\}^2+\frac{1}{15}\frac{k^2}{K^2}\{\mathrm{II}\}^2\right],\\ dS'_{//}&=\frac{1}{3}\rho\frac{\left(g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}+g_2\right)^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon\varkappa_N^3}\frac{K}{k}\{\mathrm{I}\}^2\left(1+\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\ (^3).\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

β, *transversal*,

$$\left.\begin{aligned}S_{\perp}&=\frac{16\pi}{3}\rho\frac{g_2^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa_N}{\varepsilon}\frac{k}{K^3}\left[\{\mathrm{I}\}^2+\frac{2}{3}\frac{k^2}{K^2}\{\mathrm{II}\}^2\right]+\frac{4\pi}{3}\rho\frac{\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon\varkappa_N^3}\frac{K}{k}\times\left[\frac{7}{6}\{\mathrm{I}\}^2+\frac{2}{15}\frac{k^2}{K^2}\{\mathrm{II}\}^2\right],\\ dS'_{\perp}&=\frac{4}{3}\rho\frac{g_2^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa_N}{\varepsilon}\frac{k}{K^3}\{\mathrm{I}\}^2+\frac{1}{12}\rho\frac{\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon\varkappa_N^3}\frac{K}{k}\{\mathrm{I}\}^2(5-\cos^2\theta)\ (^3).\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

d. Mésons chargés. — Araki et Tomonaga ont montré [6] qu'on pouvait calculer approximativement les sections efficaces de capture de mésons chargés en considérant d'une part le phénomène mésique pur (comme on l'a fait en *b* et *c* ci-dessus) puis en tenant compte du champ électrostatique nucléaire. Ceci revient à multiplier les sections efficaces (24), (27) et (28) par la probabilité de présence Π du méson chargé dans le voisinage du noyau :

$$\Pi(k)=\left|\frac{2\pi\xi}{e^{2\pi\xi}-1}\right|,\qquad(29)$$

ou

$$\xi=\pm\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\varkappa}{k},\qquad \text{méson}\ \begin{cases}\text{positif signe }+,\\ \text{négatif signe }-.\end{cases}$$

Ce terme correctif est important aux basses énergies du méson incident. Il est aisé de voir qu'on a lors pour un méson positif $\Pi\approx 0$ et pour un méson négatif $\Pi'\approx 2\pi\xi$.

4. Capture d'un méson négatif lié par le deutéron. — Nous avons indiqué dans l'introduction que le phénomène essentiel pour l'absorption des mésons négatifs est la capture à partir d'une orbite stable autour du deutéron, pratiquement l'orbite K [12]. On peut alors calculer la probabilité de ce processus, ou ce qui revient au même la vie moyenne d'un méson sur une couche K.

a. Méson pseudoscalaire. — L'hamiltonien d'interaction est toujours de la forme (13 *a*,*b*). La présence du champ coulombien modifie la forme des quantités conjuguées Ψ et Φ. Les fonctions Ψ sont les solutions de l'équation de Schrödinger décrivant le mouvement d'un corpuscule dans un champ coulombien; pour la couche K, Ψ est de la forme

$$\Psi_K=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,e^{-\frac{r}{a}}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}},\qquad(30)$$

où

$$a=\frac{\hbar^2}{m_\pi e^2}=\frac{1}{\alpha\varkappa},\qquad \alpha=\frac{1}{137}.$$

(³) Mêmes remarques que pour la formule (**24***b*)

12.

TABLEAU.

Type de méson π vectoriel neutre.	Opérateur.	État final.	Élément de matrice de transition.	Variation du nombre quantique magnétique.
Longitudinal	$H_{//}$	$^3P_1$	$i\frac{g_1}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ +\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$	$1 \to 1$ $-1 \to -1$
		$^3P_0$	$i\frac{g_1}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \frac{1}{3}$	$0 \to 0$
		$^3P_2$	$i\frac{g_1}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$	$0 \to 0$ $1 \to 1$ $-1 \to -1$
	$H'_{//}$	$^1D_2$	$i\left(g_1\frac{\varepsilon}{\chi}+g_2\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{kK}{\chi_N}\,I' \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{15}} \end{cases}$	$1 \to 1$ $-1 \to -1$
		$^3P_0$	$i\left(g_1\frac{\varepsilon}{\chi}+g_2\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{K}{\chi_N}\,I$	$0 \to 0$
		$^3P_1$	$i\left(g_1\frac{\varepsilon}{\chi}+g_2\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{K}{\chi_N}\,I\,\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm 1 \to \pm 1$
Transversal	$H_{\perp}$	$^1S_0$	$i\frac{g_2}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k I \begin{cases} -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \end{cases}$	$1 \to 0$ $-1 \to 0$
		$^3P_0$	$i\frac{g_2}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\pm 1 \to 0$
		$^3P_1$	$i\frac{g_2}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \frac{1}{2\sqrt{3}}$	$0 \to \pm 1$
		$^3P_2$	$i\frac{g_2}{\chi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,k^2 I' \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$	$0 \to \pm 1$ $\pm 1 \to 0$
	$H'_{\perp}$	$^1S_0$	$-\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\chi}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{kK}{\chi_N}\,I' \frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\pm 1 \to 0$
		$^1D_2$	$-\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\chi}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{kK}{\chi_N}\,I' \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{cases}$	$0 \to \pm 1$ $\pm 1 \to 0$
		$^3P_0$	$i\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\chi}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{K}{\chi_N}\,I \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$1 \to 0$ $-1 \to 0$
		$^3P_1$	$i\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\chi}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon}}\,\frac{K}{\chi_N}\,I \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	$0 \to \pm 1$ $-1 \to 0$ $1 \to 0$

La quantité canoniquement conjuguée est

$$\Phi_K = i\varepsilon\Psi_K \tag{31}$$

où ε est l'énergie totale du méson.

Le calcul des éléments de matrice de transition est identique à celui du § III, on obtient :

$$\left.\begin{aligned}(^3P_1|H|0) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{f_2}{\varkappa}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I'', & m_i &= m_f,\\ (^3P_1|H'|0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I, & m_i &= m_f.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

I'' est une expression de la forme

$$\begin{aligned}I'' &= \frac{\lambda}{K}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{(1-C_1)\mathcal{P}_0-(1-2C_1)\mathcal{P}_1-C_1\mathcal{P}_2\}\\ &= \frac{\lambda}{K}\sqrt{\frac{2\rho\varkappa}{\pi}}\{\mathrm{III}\},\end{aligned}$$

où les $\mathcal{P}_n$ sont des expressions sans dimensions

$$\mathcal{P}_n = -\frac{\varkappa}{K}(\beta+n)P_n - \operatorname{arc\,tg}\frac{(\beta+n)\varkappa}{K}+\frac{\pi}{2}.$$

La probabilité de capture est

$$P_{PS} = \frac{4}{3}\rho\alpha^3\frac{\varkappa_N\varkappa^4 c}{\varepsilon K^3}\times\left[4\frac{f_2^2}{4\pi\hbar c}\alpha^2\{\mathrm{III}\}^2+\frac{1}{3}\left(\frac{K}{\varkappa_n}\right)^4\frac{\left(f_1+f_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\{\mathrm{I}\}^2\right]. \tag{33}$$

où α est la constante de structure fine et c la vitesse de la lumière.

b. MÉSON VECTORIEL. — Des considérations analogues donnent pour les éléments de matrice :

$$\left.\begin{aligned}(^3P_0|H|0) &= -i\left(g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}+2g_2\right)\frac{1}{a\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I''\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad 0\to 0,\\ (^3P_1|H|0) &= \pm i\left(g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}+g_2\right)\frac{1}{a\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I''\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{cases}+1\to+1,\\-1\to-1,\end{cases}\\ (^3P_2|H|0) &= i\left(-g_1\frac{\varepsilon}{\varkappa}+g_2\right)\frac{1}{a\varkappa}\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I''\begin{cases}\frac{2}{3}, & 0\to 0,\\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & +1\to+1,\\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & -1\to-1,\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{34 a}$$

$$\left.\begin{aligned}(^3P_0|H'|0) &\quad +i\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0\to 0,\\ (^3P_1|H'|0) &= -i\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)\sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi a^3\varepsilon}}I\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{cases}+1\to+1,\\-1\to-1.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{34 b}$$

La probabilité de capture est :

$$P_V = \frac{4}{3}\rho\alpha^3\frac{\varkappa_N\varkappa^4 c}{\varepsilon K^3}\times\left[2\frac{g_1^2\frac{\varepsilon^2}{\varkappa^2}+\frac{4}{3}g_2^2}{4\pi\hbar c}\alpha^2\{\mathrm{III}\}^2+\frac{7}{12}\left(\frac{K}{\varkappa_N}\right)^4\frac{\left(g_1+g_2\frac{\varepsilon}{\varkappa}\right)^2}{4\pi\hbar c}\{\mathrm{I}\}^2\right]. \tag{35}$$

5. **Calculs numériques.** — Si l'on adopte pour masse du méson la valeur 286 m_0 donnée par les expériences de Berkeley on a :

$$\varkappa = 0{,}74.10^{13}\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

Les valeurs des constantes nucléaires f_2 et g_2 sont alors

$$\frac{f_2^2}{4\pi\hbar c} = \frac{g_2^2}{4\pi\hbar c} = 0{,}096,$$

$$\rho = 2{,}79, \quad C_1 = 0{,}366.$$

D'autre part :

$$\varkappa_N = 4{,}76.10^{13}\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

$$\frac{f_1^2}{4\pi\hbar c} = \frac{g_1^2}{4\pi\hbar c} = 0{,}03.$$

En prenant pour énergie de liaison du deutéron la valeur de 2, 16 MV on a

$$\beta = 0{,}309.$$

Dans le cadre des approximations faites quant à l'énergie des mésons incidents on a sensiblement

$$\varepsilon = \varkappa.$$

Comme on l'a vu d'autre part l'énergie du deutéron dans l'état final étant sensiblement constante, la valeur du moment K des nucléons émis est de :

$$K = 1{,}88.10^{13}\ \mathrm{cm}^{-1},$$

tandis que les expressions $\{\dots\}$ ont pour valeur

$$\{\mathrm{I}\}^2 = 4{,}8.10^{-2},$$
$$\{\mathrm{II}\}^2 = 0{,}115$$
$$\{\mathrm{III}\}^2 = 0{,}28$$

Avec ces valeurs numériques on obtient pour les sections efficaces, en négligeant des termes du second ordre par rapport à la vitesse du méson incident :

$$\mathcal{S}_{PS} = \left\{ 1,3\sqrt{\frac{E_\pi}{m_0 c^2}} + 2,6\sqrt{\frac{m_0 c^2}{E_\pi}} \right\} 10^{-28}\ \text{cm}^2.$$

$$\mathcal{S}_{\parallel} = 3\sqrt{\frac{m_0 c^2}{E_\pi}}\ 10^{-28}\ \text{cm}^2,$$

$$\mathcal{S}_{\perp} = \left\{ 1,3\sqrt{\frac{E_\pi}{m_0 c^2}} + 3\sqrt{\frac{m_0 c^2}{E_\pi}} \right\} 10^{-28}\ \text{cm}^2,$$

(E_π énergie du méson).

Pour les vies moyennes du méson π^- sur une couche K on obtient

$$\tau_{PS} = 8,5.10^{-14}\, S,$$
$$\tau_V = 5.10^{-14}\, S.$$

6. **Conclusion.** — On observera que les sections efficaces précédentes sont très petites, même pour une faible énergie du méson incident. Le champ coulombien du noyau modifie sensiblement ces résultats, comme on l'a vu dans l'Introduction. Pour les mésons π positifs, le seul phénomène intervenant dans la pratique est la désintégration en mésons légers μ. Pour les mésons π négatifs, au contraire, le champ de Coulomb augmente la section efficace d'absorption des mésons libres, mais celle-ci reste néanmoins petite (de l'ordre de 10^{-27} cm² pour des énergies mésiques faibles). Pour ce type de méson, c'est la capture à partir d'une orbite K qui est le processus essentiel, en supposant que la durée du freinage ne soit pas trop considérable; Fermi, Weisskopf et Teller [7] ont trouvé, comme ordre de grandeur pour faire passer un méson d'énergie cinétique considérable à quelques milliers de volts un temps de $\approx 10^{-12}$ sec. Avec cette valeur c'est certainement la capture à partir d'une orbite K qui a lieu.

En ce qui concerne le méson neutre, seule l'absorption directe est possible, avec une section efficace de l'ordre de 10^{-28} cm², pour une énergie de 1 meV.

La mésodésintégration du deutéron est donc, en *principe*, une méthode pour déceler l'existence d'un méson neutre, d'après le processus B de l'introduction. Toutefois on ne doit pas manquer de souligner que l'on rencontre de grandes difficultés aussi bien théoriques qu'expérimentales :

a. théoriquement on peut penser que le méson π^0 est très instable vis-à-vis de la désintégration en deux photons [13], la vie moyenne étant de l'ordre de 10^{-16} s. Toutefois les calculs effectués à ce propos font intervenir des intégrales divergentes, d'où un résultat qui peut être suspecté.

b. sur le plan expérimental la présence de neutrons très énergiques au voisinage du cyclotron peut masquer le phénomène. La distribution angulaire des protons projetés donne alors un moyen de distinguer les mésodésintégrations des chocs entre deux nucléons. Les formules (24 *b*), (27) et (28) montrent en effet que le facteur d'asymétrie

$$\gamma = \frac{dS(\pi)}{dS\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

des distributions angulaires de capture de méson π varie peu :

$\gamma = \text{const.}$ pour le méson pseudoscalaire,
$1 < \gamma < 1,5$ » vectoriel longitudinal,
$0,8 < \gamma < 1$ » » transversal.

Au contraire la distribution des protons projetés par les neutrons de grandes énergies est très asymétrique. D'après les données expérimentales [14] γ est de l'ordre de 3.

c. Quoique dans le domaine énergétique que nous avons considéré les sections efficaces globales, les distributions angulaires et les probabilités de capture dépendent du type du méson incident, les différences ne sont pas assez notables pour permettre de conclure quant au spin des particules responsables de la mésodésintégration.

Nous tenons à remercier M. A. Proca pour les discussions que nous avons eues avec lui au cours de ce travail et pour l'aide qu'il n'a cessé de nous apporter.

L'un de nous voudrait exprimer ici sa gratitude à M. le professeur F. Joliot. Ces recherches ont pu être effectuées grâce aux allocations fournies par le Centre National de la Recherche Scientifique.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Gardner, Lattès, *Science*, 1948, **107**, p. 270.
[2] Lattès, Occhialini et Powell, *Nature*, 1947, **160**, p. 453 et 486.
[3] Marty et Prentki, *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, p. 765.
[4] Corben et Massey, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1939, **35**, p. 84. — Heitler, *Proc. Roy. Soc.*, 1938, **166**, p. 529. — Yukawa et Okayama, *Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res. Tokyo*, 1939, **36**, p. 385.
[5] p. exp. Rosenfeld, *Rep. Int. Conf.* Cambridge, 1946, p. 132.
[6] Araki et Tomonaga, *Phys. Rev.*, 1940, **58**, p. 90.
[7] Fermi, Teller et Weisskopf, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 314. — Fermi et Teller, *Phys. Rev.*, 1947, **72**, p. 399. — *voir aussi* Ferreti, *Nuov. Cim.*, 1948, **5**, p. 209.
[8] Kemmer, *Helv. Phys. Acta*, 1937, **10**, p. 47.
[9] Möller et Rosenfeld, *Det. Kgl. Danske Vid. Selsk.*, 1940, **17**, fasc. 8.
[10] Hulthen, *Arkiv. f. Mat. Astr. och Fys.*, 1942, **28** *A*, fasc. **5**, *ibid.*, 1942, **29** *B*, fasc. **1**.
[11] Pais, *Det. Kgl. Danske Vid. Selsk.*, 1943, **20**, fasc. **17**.
[12] Wheeler, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 320.
[13] Finkelstein, *Phys. Rev.*, **72**, p. 415.
[14] Hadley, Kelly, Leith, Segrè, Wiegand, York, *Phys. Rev.*, 1948, **73**, p. 1114.

LA PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES AU-DESSUS DU SOL. SOLUTION DU PROBLÈME DE L'ONDE DE SURFACE

Par T. KAHAN et G. ECKART.
Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques.

Sommaire. — A. *L'objet de la controverse :* 1. Remarques historiques sur le problème du rayonnement dipolaire jusqu'à la parution du travail de Sommerfeld. — 2. La solution de Sommerfeld. — 3. La solution de Weyl, en particulier sous la forme donnée par Noether.

B. *Le développement ultérieur de la controverse* : 1. Remarques d'ordre mathématique et physique. — 2. Travaux des autres auteurs (théoriques et expérimentaux). — 3. Les observations d'Epstein.

C. *Solution du problème :* 1. L'unicité garantie par l'*Ausstrahlungsbedingung*. — 2. L'onde de surface ne satisfait pas à cette condition. — 3. Étude des chemins d'intégration.

a. La position des coupures de ramification chez Sommerfeld. Déplacement de ces coupures. — *b.* Représentation conforme du plan λ de Sommerfeld sur le plan $\mathfrak{z}$ de Weyl. — *c.* Le col passé inaperçu chez Sommerfeld. — *d.* Remarques sur la coupure autour de k_2.

d. Résumé. — *e.* Bibliographie.

A. **L'objet de la controverse.** — 1. *Aperçu historique sur le problème.* — Avec l'avènement de la Télégraphie sans Fil, l'intérêt des physiciens et des ingénieurs s'est porté sur les phénomènes de propagation dans l'espace. Une des premières tentatives faites pour expliquer la grande portée des ondes électromagnétiques est due à H. Poincaré. Son travail avait précisément pour objet la propagation de ces ondes sur une sphère parfaitement conductrice. Plus tard (1907), Zenneck [1] entreprit l'étude d'un nouveau type d'onde, dite de surface conçue comme onde plane sans poser la question de savoir si ce type d'onde faisait partie du rayonnement dipolaire ou non. Dans l'hypothèse d'une conductivité infinie du sol, Max Abraham a étudié le rayonnement d'un dipôle. Dans ce cas toutefois, tous les problèmes à traiter par la suite s'éliminent, de sorte que ce travail n'est autre chose qu'un cas limite intéressant.

C'est en 1909 que parut le célèbre travail de Sommerfeld [2] qui avait pour objet le rayonnement du dipôle sur un sol de conductivité finie. Sommerfeld trouva dans sa solution une onde qui, aux grandes distances de l'émetteur, se réduisait au type étudié par Zenneck et qui aux faibles distances, avait le caractère d'une onde cylindrique, correspondant au type d'onde qui se produit sur une ligne bifilaire le long d'un fil. On était à ce moment unanimement d'avis que le problème de la propagation des ondes de T. S. F. le long de la Terre ronde avait de ce chef trouvé sa solution, l'existence de l'ionosphère n'étant pas encore connue à cette époque.

En 1919 Weyl revient dans un mémoire [4] sur le même sujet, ne retrouve pas dans sa solution l'onde de surface et s'en prend à la conception de Sommerfeld. Cette controverse n'a pas trouvé jusqu'à ce jour sa solution définitive. Un grand nombre d'auteurs tant en Europe qu'en Amérique se sont penchés sur ce problème sans en toucher le fond.

Dans le présent travail le problème trouve sa solution sous une forme qui, d'une part, met en évidence l'impossibilité physique de l'onde de surface dans le rayonnement dipolaire et qui, d'autre part, montre immédiatement que Sommerfeld ne s'est pas aperçu de l'existence, dans son développement asymptotique, d'un col. Pour permettre au lecteur de se faire une idée complète de la question, nous allons en retracer les diverses étapes. Pour cela nous reproduirons d'abord le raisonnement de Sommerfeld, pour exposer ensuite la méthode de Weyl sous une forme plus simple due à Noether [6]. Nous mettrons enfin en relief les deux points qui touchent au fond du problème.

2. **La solution de Sommerfeld.** — Voici le problème de Sommerfeld (*fig.* 1). Soient deux milieux superposés séparés par un plan de séparation infiniment étendu. Soient ε_1 la constante diélectrique du milieu supérieur 1 et σ_1 sa conductivité; soient ε_2 et σ_2 les mêmes constantes relatives

au milieu inférieur 2 et posons (¹)

$$k_{1,2}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{1,2} + j \mu_0 \sigma_{1,2} \qquad (1)$$

en supposant μ_1 et μ_2 (perméabilités relatives) égaux à 1. Soit un dipôle vertical hertzien situé sur le plan de séparation.

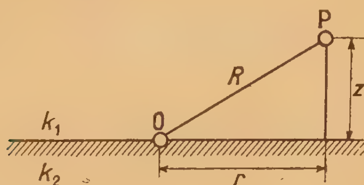


Fig. 1.

On recherche le champ de rayonnement dû à ce dipôle. On admettra des ondes harmoniques évoluant suivant exp. $(-j\omega t)$. On est amené à résoudre les équations de Maxwell avec les conditions aux limites classiques : continuité des composantes tangentielles de E et de H sur la surface de séparation. On a ainsi pour les deux milieux

$$\operatorname{rot} H = (\sigma_{1,2} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{1,2})E, \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot} E = j\omega\mu_0 H. \qquad (3)$$

On définit le vecteur de Hertz par

$$H = -j\omega \operatorname{rot} \Pi, \qquad (4)$$

où Π ne possède, en vertu des hypothèses faites, qu'une seule composante z. Il vient alors

$$\operatorname{rot} E = \omega^2 \mu_0 \operatorname{rot} \Pi, \qquad (5)$$

donc

$$E = \omega^2 \mu_0 \Pi + \operatorname{grad} \varphi, \qquad (6)$$

où l'on peut encore disposer de φ. En portant dans (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= -j\omega \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi \\ &= -j\omega(\operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \Delta\Pi) \\ &= \omega^2\mu_0(\sigma_{1,2} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{1,2})\Pi \\ &\quad + (\sigma_{1,2} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{1,2}) \operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \qquad (7)$$

Avec

$$(\sigma_{1,2} - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{1,2})\varphi = -j\omega \operatorname{div} \Pi, \qquad (8)$$

on obtient

$$\Delta\Pi + k_{1,2}^2 \Pi = 0, \qquad (9)$$

$k_{1,2}$ étant défini par (1).

De même nous écrirons dans ces deux milieux 1 et 2

$$\Pi = \Pi_{1,2}. \qquad (10)$$

Les conditions aux limites sur la surface de séparation des deux milieux s'écrivent

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = 0. \qquad (11)$$

Ceci posé, cherchons avec Sommerfeld [2], [14], [9] deux fonctions Π_1 pour $z > 0$ et Π_2 pour $z < 0$ jouissant des propriétés suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Pi_1 + k_1^2\Pi_1 = 0, \quad & z > 0, \\ \Delta\Pi_2 + k_2^2\Pi_2 = 0, \quad & z < 0; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \quad z = 0; \qquad (\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 = 0 \quad \text{pour } z > 0, \quad & r \to \infty, \quad z \to \infty, \\ \Pi_2 = 0 \quad \text{pour } z < 0, \quad & r \to \infty, \quad z \to -\infty; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{III})$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 - \frac{e^{jk_1R}}{R}, \quad & z \geq 0, \\ \Pi_2 - \frac{e^{jk_2R}}{R}, \quad & z \leq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{IV})$$

sont des quantités finies et continues ainsi que toutes leurs dérivées, au point $z = 0$ compris.

Ici

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \qquad (12)$$

est la distance émetteur-récepteur et r le rayon cylindrique horizontal.

Sommerfeld suppose tout d'abord que les deux constantes k_1 et k_2 (ou tout au moins l'une d'elles) sont « dissipatives » et établit sa démonstration d'unicité dans cette hypothèse considérée comme essentielle. Il ajoute que dans le cas de valeurs purement réelles de $k_{1,2}$, Π doit s'annuler à l'infini suivant des ordres de grandeurs supérieur à $\frac{1}{R}$ sans s'appesantir sur ce cas. Or, dans un travail publié en 1913 [2] sur la fonction de Green de l'équation d'ondes, Sommerfeld montre que pour un ensemble de dipôles et de conducteurs situés *à distance finie*, l'unicité de la solution est garantie par la condition dite « Ausstrahlungsbedingung » ou condition d'existence d'ondes divergentes qui se substitue à la conjecture que Π devait s'annuler plus rapidement que $\frac{1}{R}$. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce cas et de compléter la démonstration d'unicité de Sommerfeld pour le cas d'un espace diélectrique s'étendant à l'infini. Cela nous permettra d'obtenir un critère essentiellement physique pour la non-existence de l'onde de surface dans le rayonnement dipolaire.

Ceci posé, superposons le « rayonnement primaire » dû au dipôle au « rayonnement secondaire » dû à la « réflexion » sur la surface de séparation. Sommerfeld écrit ces grandeurs sous forme d'intégrales étendues sur la fonction de Bessel $J_0(\lambda r)$, (λ paramètre d'intégration) de la façon suivante.

Nous avons dans le milieu supérieur 1

$$\Pi_{1\,\mathrm{prim}} = \frac{e^{ik_1R}}{R} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}, \quad z > 0. \qquad (13)$$

La racine $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ est choisie de telle sorte qu'elle tende pour $\lambda \to \infty$ sur l'axe réel, vers $+\lambda$; elle y aura donc une partie réelle positive. On a de

(¹) Nous utilisons le système d'unités pratiques M. K. S.

même dans le milieu inférieur 2

$$\Pi_{2\,\mathrm{prim}} = \frac{e^{ik_2R}}{R} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda\, e^{+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,z}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}, \quad z<0. \quad (14)$$

Pour tenir compte du rayonnement « secondaire », Sommerfeld introduit de même des fonctions d' « amplitude » $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$, de sorte qu'il obtient pour le champ total dans les deux milieux :

$$\Pi_1 = \frac{e^{ik_1R}}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) f_1(\lambda)\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\, d\lambda, \quad z>0, \quad (15)$$

$$\Pi_2 = \frac{e^{ik_2R}}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) f_2(\lambda)\, e^{+z\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, d\lambda, \quad z<0. \quad (16)$$

f_1 et f_2 permettent précisément de satisfaire aux conditions aux limites (I) et (II); il vient ainsi

$$f_1(\lambda) = \frac{k_1^2}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\,\frac{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}, \quad (17)$$

$$f_2(\lambda) = \frac{k_2^2}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\,\frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}, \quad (18)$$

Ce faisant on tient compte que pour des raisons de convergence on ne doit pas dériver le rayonnement primaire sous le signe somme pour $z = 0$, mais que pour $z = 0$, sa dérivée par rapport à z est nulle.

En vertu de (13), (14), (15), (16), (17), (18) on obtient

$$= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\,\frac{k_1^2+k_2^2}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\,\lambda\, d\lambda, \quad z>0; \quad (19)$$

$$= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\,\frac{k_1^2+k_2^2}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\, e^{+z\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\,\lambda\, d\lambda, \quad z<0. \quad (20)$$

Nous allons nous borner désormais à la discussion de l'intégrale pour Π_1. Sommerfeld procède ainsi. Il substitue à $J_0(\lambda r)$ la relation classique (fonctions de Hankel)

$$J_0(\lambda r) = \frac{1}{2}\left[H_0^{(1)}(\lambda r) + H_0^{(2)}(\lambda r)\right]. \quad (21)$$

Le chemin d'intégration de l'intégrale de H_0^2 dans le plan λ qui coïncide d'abord avec l'axe réel est déplacé ensuite vers l'axe imaginaire négatif (*fig.* 2); l'intégrale prise sur le grand quart de cercle s'annule (tracé en pointillé). Le chemin d'intégration de l'intégrale de $H_0^{(1)}$ est de même déplacé dans le demi-plan imaginaire positif. Là encore l'intégrale prise le long du quart de cercle (en pointillé) dont le rayon est infini est nulle. Les deux parties de l'intégrale prises sur l'axe imaginaire positif et négatif se compensent et il ne reste que les contributions dues aux points singuliers de l'expression à intégrer, situés dans le demi-plan supérieur. Ces singularités sont : 1° les deux coupures de branchement qui partent des points $\lambda = k_1$ et $\lambda = k_2$ pour aboutir à l'infini et qui sont tracées par Sommerfeld de façon que les racines $\sqrt{\lambda^2 - k_{1,2}^2}$ y soient purement imaginaires; ces courbes sont alors des hyperboles équilatères passant par les points $k_{1,2} = \lambda$ qui ont pour asymptotes les axes éel et imaginaire de λ. Lorsque k_1 et k_2 deviennent purement réels elles se rapprochent indéfiniment de ces axes pour se confondre finalement avec eux; 2° le pôle dû au zéro du dénominateur de l'intégrale. Ce zéro est donné par

$$\lambda = p = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2+k_2^2}}. \quad (22)$$

Nous reviendrons par la suite à la position exacte de ce pôle. Sommerfeld montre que le pôle se trouve sur le feuillet supérieur du plan λ armé des coupures susmentionnées et il situe le pôle à peu près comme nous l'avons fait sur la figure 2. Nous verrons qu'il

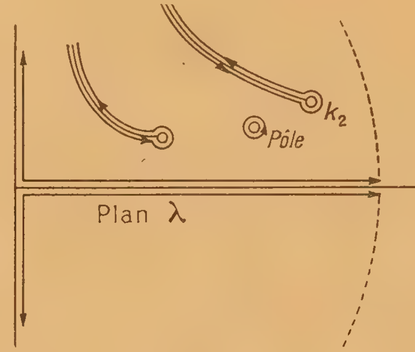


Fig. 2.

est plus correct de situer le pôle à l'endroit marqué d'une croix sur la figure 2. En introduisant l'angle de Brewster (ou de polarisation) défini par

$$\operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{k_2}{k_1}, \quad (23)$$

il vient

$$p = k_1 \sin \vartheta_B, \quad (24)$$

quantité qui est réelle pour $k_{1,2}$ réel et qui devient complexe quand k_1 ou k_2 l'est. Or, en calculant les intégrales, le lacet autour de ce pôle fournit, sous forme de résidu l'onde de surface qu'on peut écrire, pour les grandes distances à l'émetteur (où la fonction de Hankel $H_0^{(1)}(\lambda r)$ se confond avec son développement asymptotique) sous la forme (K étant une constante)

$$P = \frac{K}{\sqrt{r}}\, e^{-jk_1 z \cos \vartheta_B}\, e^{+jk_1 r \sin \vartheta_B}. \quad (25)$$

Elle se présente sous la forme d'une onde cylindrique et correspond au facteur $\frac{1}{\sqrt{r}}$ près, à une

onde plane dont l'angle d'incidence sur la surface de séparation est ϑ_β. Si k_1 et k_2 sont réels, ϑ_β devient réel ainsi qu'il a été dit plus haut; si l'un des $k_{1,2}$ est complexe, il se produit une onde avec un angle d'incidence complexe, onde singulière pour laquelle les surfaces de phase et d'amplitude constantes ne se confondent pas. C'est une onde qui se propage sur la surface d'un conducteur d'une ligne bifilaire et qui porte pour cela le nom d'onde de « Lecher », à la différence des ondes guidées dans un guide d'ondes. Elle nécessite [8, 12] un conducteur de retour qui n'existe pas dans notre cas (*cf.* aussi Noether [5]); nous y reviendrons par la suite. Dès 1907, Zenneck avait étudié son affaiblissement le long du sol.

Passons maintenant à l'étude des intégrales prises sur les coupures. Pour k_2 complexe, l'intégrale prise sur la seconde coupure fournit une contribution exponentiellement atténuée avec r et z. Lorsque k_2 est purement réel, cette contribution s'affaiblit exponentiellement quand z croît; elle est de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ et peut être laissée de côté. Ce point n'a jamais fait l'objet d'un litige.

L'intégrale prise sur la coupure k_1 est représentée par Sommerfeld asymptotiquement

$$Q = \frac{M}{r^2}(a + b z). \tag{26}$$

Cette solution se confond avec celle de Weyl. Nous verrons par la suite que Sommerfeld ne s'est pas aperçu que dans cette représentation asymptotique, l'intégrale prise le long de la coupure 1 renferme en plus l'onde de surface affectée du signe contraire et qu'elle annule par conséquent l'onde de surface due au pôle.

2. *La solution de Weyl.* — En 1919 parut dans les *Annalen der Physik* le travail déjà cité de Weyl [4] relatif au même problème dans lequel la représentation asymptotique complète aboutit à l'onde Q de l'équation (26). Aussi Weyl mit-il en doute l'existence de l'onde de surface. En 1929, Noether a repris les calculs de Weyl ([5], *cf.* aussi [10], p. 153 et suiv.) sous une forme plus claire. Sommerfeld avait déjà indiqué, dans son mémoire de 1909, la possibilité du développement suivant des ondes planes qui est le point de départ de Weyl. Ce dernier auteur intègre suivant un groupe d'ondes planes d'égale amplitude, mais de directions différentes auquel il y a lieu d'ajouter des ondes de cosinus directeurs complexes. Son rayonnement primaire s'écrit (avec exp. $(-j\omega t)$, au lieu de exp. $(j\omega t)$ de Weyl)

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \frac{1}{2\pi}\int e^{jk(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,d\omega, \tag{27}$$

où $d\omega$ est un angle solide (qui peut devenir complexe dans certaines conditions) sur la sphère unité. α, β, γ sont les cosinus directeurs, également en partie complexes, des ondes élémentaires planes par rapport auxquels on intègre. x, y, z sont les coordonnées du point d'observation. Introduisons au lieu et place des trois cosinus directeurs α, β, γ, reliés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{28}$$

les coordonnées angulaires ϑ (= distance polaire)

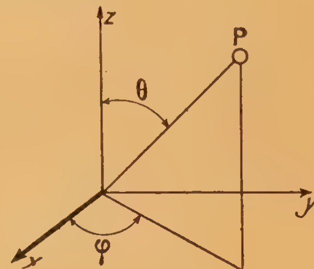


Fig. 3.

et φ (= azimuth) (*fig.* 3); il vient alors pour le rayonnement primaire

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \frac{1}{2\Pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_0^A e^{jk[(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin\vartheta+z\cos\vartheta]}\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{29}$$

L'intégration par rapport à ϑ doit se faire le long du chemin de la figure 4 : de 0 à $\frac{\pi}{2}$ sur l'axe réel,

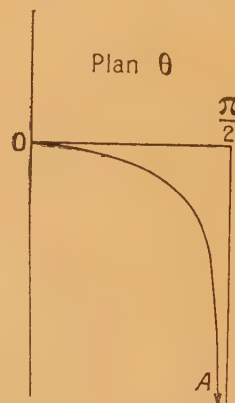


Fig. 4.

puis le long $\frac{\Pi}{2} - A$ dans le demi-plan imaginaire négatif. Bien entendu tous les chemins équivalents en vertu du théorème de Cauchy sont admissibles. Weyl ajoute encore à ces ondes planes l'onde réfléchie sur le sol et l'onde qui y pénètre et superpose toutes ces ondes. Nous avons déjà introduit, pour le système dans lequel on effectue l'intégration, des coordonnées polaires. Après introduction de

nouvelles coordonnées polaires r, χ dans le plan x, y et un déplacement de coordonnées $\varphi - \chi = \psi$, il résulte de (29)

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \frac{j}{2\Pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\psi \int_{0}^{A} e^{jk_1(r\cos\psi\sin\vartheta + z\cos\vartheta)}\sin\vartheta\, d\vartheta. \quad (30)$$

En effectuant l'intégration suivant ψ, on obtiendrait la fonction de Bessel $J_0\,(k_1\, r \sin\vartheta)$ et l'on voit que la quantité $k_1 \sin\vartheta$ correspond au paramètre λ de Sommerfeld

$$\lambda = k_1 \sin\vartheta. \quad (31)$$

Nous reviendrons encore sur la représentation conforme entre les plans λ et ϑ moyennant cette relation. Comme après l'adjonction de l'onde réfléchie dans le milieu supérieur, Weyl effectue

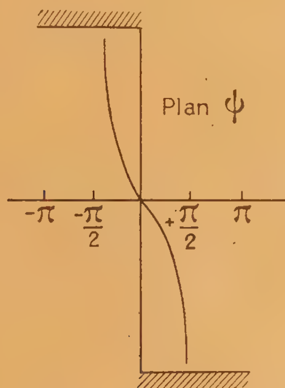


Fig. 5.

l'intégration suivant φ et ϑ sous forme asymptotique d'une manière plutôt compliquée, nous suivons l'exposé plus simple de Noether [5]. Par un déplacement du chemin dans φ vers l'infini qui, en principe, correspond chez Sommerfeld au passage aux fonctions $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$ on obtient l'intégrale

$$\Pi_1 = \frac{jk_1 k_2}{\pi}\int_I d\psi \int_{A_1}^{A} d\vartheta \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{k_2\cos\vartheta + k_1 \sin\eta} \times e^{jk_1(r\cos\psi\sin\vartheta + z\cos\vartheta)}, \quad (32)$$

où η est l'angle directeur du rayon réfracté correspondant à l'angle d'incidence ϑ, défini par

$$k_1 \sin\vartheta = k_2 \sin\eta, \quad (33)$$

qui est la loi de réfraction, valable aussi dans le complexe. Le chemin d'intégration dans le plan ψ que nous avons à suivre ici est représenté sur la figure 5, alors que la figure 6 dessine le nouveau chemin AA′ dans le plan ϑ. On peut sans enfreindre la convergence, passer à l'infini dans les deux intégrales, dans les intervalles hachurés compris entre o et $\pm\pi$. Or on voit que le chemin dans ψ (*fig.* 5) doit fournir $H_0^{(1)}$ si l'on intègre d'abord suivant ψ, ce qui n'est pas indispensable par ailleurs. Or il existe pour $\psi = 0$ un col ainsi qu'entre o et $\frac{\pi}{2}$ sur l'axe réel du plan ϑ. Noether effectue l'intégration

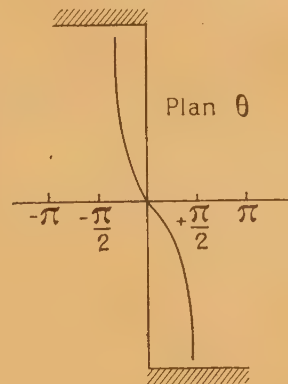


Fig. 6.

sous forme d'une intégrale double et aboutit avec Weyl à un résultat qui se confond complètement avec l'onde d'espace Q de Sommerfeld, si l'on prend dans (26) la quantité $\frac{z}{r}$ dans une première approximation pour $\cos\vartheta$, pour des valeurs de $\vartheta \approx \frac{\pi}{2}$.

La solution de Weyl que nous n'expliciterons pas vaut en général pour chaque point z, r tandis que la solution de Sommerfeld représente son développement pour de faibles hauteurs au-dessus du sol. Pour nous il est essentiel de faire remarquer qu'il n'est question chez Weyl d'aucune onde de surface car son chemin ne passe par aucun pôle.

B. **Évolution de la controverse.** — 1. La controverse a donc pris naissance avec la parution du travail de Weyl. Tout d'abord la clarification fut rendue plus difficile par le fait que Sommerfeld exclut expressément dans sa solution, des valeurs purement réelles de k_1 et k_2, de sorte que l'onde de surface est affectée d'une atténuation exponentielle même quand k_1 est réel et que k_2 est complexe. Une telle atténuation ne se produit pas pour k_1 et k_2 réels. C'est pourquoi, dans un développement asymptotique du champ total, l'onde de surface serait, pour un développement suivant les puissances négatives de r, identiquement nulle, donc elle ne figurerait pas chez Weyl, ce que Sommerfeld avait déjà dit dans son travail de 1909. Comme toutefois Weyl ne se restreint pas à des valeurs complexes de k_1 et k_2 cette interprétation tombe en défaut : pour des valeurs purement réelles de k_1 et k_2 l'onde de surface l'emporterait en grandeur

sur tous les autres termes en vertu du facteur $\frac{1}{\sqrt{r}}$ sans atténuation exponentielle.

Par ailleurs Noether fait l'objection suivante contre l'onde de surface : l'onde de surface est, ainsi que nous l'avons déjà souligné, une onde sur fil qui nécessite un conducteur de retour pour son régime qui n'existe pas dans notre problème. En 1929 cet argument ne semblait pas absolument valable. Or il résulte de divers travaux (déjà cités) effectués depuis que pour les ondes T. E. M. il faut un conducteur de retour. Il y a donc là déjà comme un critère pour l'impossibilité de l'onde de surface.

2. Norton [6] reprit le problème sans retrouver l'onde de surface. Il fut incapable de résoudre l'énigme. Du côté expérimental le problème fut abordé par Burrows qui étudia la propagation sur un plan conducteur. Il choisit des conditions dans lesquelles l'onde de surface devait être cent fois plus intense que l'onde d'espace (longueur d'onde de l'ordre de 1 m, au-dessus d'un lac, aux E. U. d'A.). Il prit énormément de soins au cours de ses essais et obtint avec une grande précision l'onde l'espace tandis que l'onde de surface qui devait l'emporter de beaucoup sur l'onde d'espace, échappait à l'expérience. Remarquons ici en passant que comme le montrera l'un de nous [16] l'onde d'espace rend compte d'un phénomène connu dans le diagramme vertical du rayonnement d'un émetteur à savoir le coude au voisinage du sol (*fig.* 7).

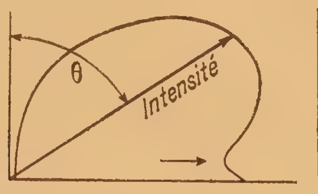


Fig. 7.

3. Epstein a été récemment [7] amené aux conclusions suivantes :

1° Le problème n'est pas bien défini (unique) et la démonstration d'unicité de Sommerfeld perd sa validité en présence d'une source de rayonnement.

Cela est incorrect car la démonstration d'unicité de Sommerfeld tient essentiellement compte de la source située à l'origine ainsi que nous le verrons encore par la suite. Nous étendrons la démonstration de Sommerfeld à des milieux purement diélectriques en l'établissant pour le cas d'une source située à l'origine;

2° Epstein soutient en plus qu'en raison de la non-unicité susmentionnée du problème tant l'onde de surface que l'onde d'espace due à la coupure de branchement constituent deux solutions distinctes dont la première serait, en tant qu'onde cylindrique, singulière tout le long de la verticale à l'origine, singularité que la source dipolaire ne présente pas à l'origine. Il faudrait donc choisir au lieu du chemin 1 de la figure 8, qui contient les ondes de surface et d'espace, le chemin 2 qui laisse de côté l'onde de surface. Epstein aurait raison ici si, ainsi que nous l'établirons par la suite, la coupure passant par k_1 ne contenait pas l'onde de surface affectée du signe contraire, ce qui a échappé jusqu'à présent à tous les auteurs qui se sont attachés à l'étude de la question (*).

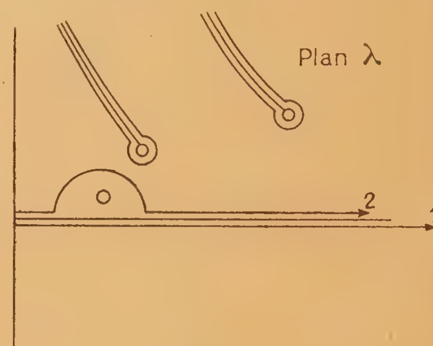


Fig. 8.

Cet état de choses est bien entendu très peu satisfaisant. L'objet de notre travail est précisément de clarifier cette situation.

C. *a.* Nous allons tout d'abord lever l'objection d'Epstein concernant la non-unicité du problème. Sommerfeld s'est attaché, quatre ans après la publication du travail en question, à l'étude approfondie des questions d'unicité [3]. Il y fait observer que la nature ne réalise bien entendu qu'une solution unique d'un tel problème de rayonnement et qu'aussi bien il ne peut s'agir que de trouver la condition qui distingue la solution réelle parmi toutes les conditions possibles. Sommerfeld a énoncé la première fois cette condition dans le mémoire cité sous le terme d' « Ausstrahlungsbedingung » ou condition d'existence d'ondes divergentes. La signification fondamentale de ce travail nous amène à en esquisser rapidement l'idée centrale.

Quand on veut établir la solution du problème défini par les conditions (I) à (IV), cette solution pourrait ne pas être bien déterminée et unique si notamment elle contenait encore des « vibrations propres de l'espace entier », à savoir des ondes stationnaires. Celles-ci doivent s'amortir dans le

(*) En tous cas, la singularité de ligne montre déjà que l'onde de surface ne peut être contenue dans la solution du problème qui ne doit présenter qu'une singularité dipolaire

cas de milieux dissipatifs, donc disparaître de notre solution qui se borne au régime permanent théoriquement établi après une durée infiniment longue. Dans le cas de valeurs purement réelles de k_1 et k_2 nous éliminons la possibilité d'ondes stationnaires — qui rempliraient aussi les conditions nécessaires de continuité et de finitude et qui pourraient rendre le problème non unique — par la condition que, pour les grandes distances à l'émetteur, le champ se compose exclusivement d'ondes divergentes (ondes issues de la source et s'en éloignant indéfiniment) sans contenir aucun terme convergent qui pourrait donner naissance précisément à des ondes stationnaires. Or Sommerfeld établit, en s'appuyant sur cette condition, une démonstration d'unicité pour des aériens au voisinage d'un groupe de corps non dissipatifs situés tous à distance finie et noyé dans un milieu indéfini non dissipatif. Comme dans notre problème le sol supposé purement diélectrique s'étend à l'infini nous compléterons la démonstration d'unicité de cet auteur pour $k_{1,2}$ réels en partant de la condition d'ondes divergentes pures. Ce faisant nous reconnaîtrons que la singularité de source à l'origine n'entame pas la validité de la démonstration contrairement à ce qu'affirme Epstein.

b. Supposons donc k_1 et k_2 purement réels. Dès lors la condition d'ondes divergentes s'écrit (avec exp. $[-j\omega t]$) sous la forme [2]

$$\left.\begin{aligned} &a.\ \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial n} - jk\Pi_1\right) = 0 \\ \text{et}\qquad &b.\ \lim_{R\to\infty} R\Pi_1 \neq \infty, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

n est la normale pointant vers l'extérieur d'une surface à l'infini enveloppant tout le dispositif. En prenant pour celle-ci une grande sphère, cette direction se confond avec celle de R (considéré comme rayon vecteur). Ceci étant, reformulons notre problème. Mettons à la place des conditions (I) à (IV) les conditions (I′) à (IV′), ces deux groupes de conditions se distinguant en ceci que (IV′) remplace (III) et que $k_{1,2}$ sont maintenant purement réels. Nous cherchons donc deux fonctions Π_1 et Π_2 jouissant des propriétés suivantes :

On a

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Pi_1 + k_1^2\Pi_1 &= 0, \quad z > 0, \\ \Delta\Pi_2 + k_2^2\Pi_2 &= 0, \quad z < 0. \end{aligned}\right\} \tag{I′}$$

Pour $z = 0$, on a

$$\Pi_1 = \Pi_2, \qquad \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial \Pi_2}{\partial z}; \tag{II′}$$

(2) La condition *b* fut imposée à cette époque par Sommerfeld indépendamment de la condition *a*. Depuis Relich ([14], p. 195) a démontré que celle-ci est déjà contenue dans la condition *a*.

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_1 - \frac{e^{jk_1R}}{R}, \quad z \geqq 0, \\ &\Pi_2 - \frac{e^{jk_2R}}{R}, \quad z \leqq 0, \\ &\text{finis et continus avec leurs dérivées} \\ &\text{aussi pour } R = 0; \end{aligned}\right\} \tag{III′}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial n} - jk_1\Pi_1\right) = 0, \quad \lim_{R\to\infty} R\Pi_1 \neq \infty, \quad z > 0, \\ &\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial n} - jk_2\Pi_2\right) = 0, \quad \lim_{R\to\infty} R\Pi_2 \neq \infty, \quad z < 0. \end{aligned}\right\} \tag{IV′}$$

Récrivons (IV′) selon Sommerfeld

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial n} - jk_i\Pi_i\right) = \Pi_i^* \quad \text{avec} \quad \Pi^* \underset{R\to\infty}{\to} 0 \\ &(i = 1, 2). \end{aligned}\right\} \tag{IV′a}$$

Supposons que nous ayons deux solutions différentes de ce problème ; nous allons montrer que leur différence est nulle. Soient Π_1, Π_2 la première solution, Π'_1, Π'_2 la seconde solution ; $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2$ la première solution conjuguée, $\overline{\Pi}'_1, \overline{\Pi}'_2$ la seconde solution conjuguée. Posons en outre

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Pi_1 - \Pi'_1, \qquad \overline{u}_1 = \overline{\Pi}_1 - \overline{\Pi}'_1, \\ u_2 &= \Pi_2 - \Pi'_2, \qquad \overline{u}_2 = \overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}'_2. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Ceci posé, la formule de Green peut se mettre sous la forme

$$\int u\,\Delta v\,dS + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dS = \int u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma, \tag{36}$$

où S est le volume du demi-espace supérieur (*fig.* 9),



Fig. 9.

σ sa surface. Le premier se compose : 1° de l'hémisphère infini; 2° d'un petit hémisphère entourant la source; 3° du plan $z = 0$ sous-tendu entre les deux hémisphères. Soit $d\Sigma$ l'élément de surface de la grande demi-sphère et soit $d\omega$ l'angle solide ($= 4\pi$ pour une sphère); il vient alors

$$d\Sigma = R\,d\omega. \tag{37}$$

Portons dans (36)

$$u = u_1, \qquad v = \overline{u}_1, \tag{38}$$

il en résulte en vertu de I'

$$k_1^2 \int u_1 u_1 \, \mathrm{d}S + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) \mathrm{d}S = \int u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma, \qquad (39)$$

l'intégrale de surface devant être étendue aux trois surfaces. On voit maintenant que l'intégrale du second membre étendue à la petite demi-sphère entourant la source s'annule comme ρ^2, ρ étant son rayon. (Ceci montre en passant que la remarque d'Epstein sur l'invalidité de la démonstration de Sommerfeld en présence d'une source n'est pas fondée.) Car en vertu de (III') nous imposons

$$\Pi_1 - \frac{e^{jk_1R}}{R} = w, \qquad (40)$$

fini et continu aussi à l'origine,

$$\Pi'_1 - \frac{e^{jk_1R}}{R} = w', \qquad (41)$$

fini et continu aussi à l'origine (y compris leurs dérivées).

C'est pourquoi

$$w - w' = \Pi_1 - \Pi'_1 = u_1 \qquad (42)$$

est également fini et continu avec ses dérivées sur la petite demi-sphère. On y a donc

$$|u_1| < M, \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| < M, \qquad (43)$$

M étant un nombre positif fixe suffisamment grand. Par suite

$$\left| \int u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma \right| < M^2 \rho^2 2\pi. \qquad (44)$$

Considérons maintenant l'intégrale du second membre étendue à la grande demi-sphère. La condition d'ondes divergentes impose à u_1

$$\lim_{R \to \infty} R \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - jk_1 u_1 \right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad R \frac{\partial u_1}{\partial n} - jk_1 u_1 R = u'$$

avec $u' \to 0$ pour $R \to \infty$. On a donc pour $\bar{u}_1$

$$R \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} + jk_1 \bar{u}_1 R = \bar{u}'_1 \quad \text{avec} \quad \bar{u}_1 \to 0, \ R \to \infty; \qquad (45)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} = -jk_1 \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}'_1}{R} \quad \text{avec} \quad \bar{u}'_1 \to 0, \ R \to \infty. \qquad (46)$$

par suite,

$$\int u_1 \left(-jk_1 \bar{u}_1 + \frac{\bar{u}'_1}{R} \right) \mathrm{d}\Sigma = \int \left(-jk_1 u_1 \bar{u}_1 + \frac{u_1 \bar{u}'_1}{R} \right) \mathrm{d}\Sigma. \qquad (47)$$

Avec $\mathrm{d}\Sigma = R^2 \, \mathrm{d}\omega$ le second membre devient

$$\int \left(-jk_1 \bar{u}_1 R^2 + R u_1 \bar{u}'_1 \right) \mathrm{d}\omega, \qquad (48)$$

où Ru_1 reste fini pour $R \to \infty$ en vertu de (IV'); $\bar{u}' \to 0$ pour $R \to \infty$, $\mathrm{d}\omega$ fini. Ainsi le deuxième terme sur la grande demi-sphère s'annule dans l'intégrale; $u_1 \bar{u}_1$ est réel et l'intégrale, finie en vertu de (IV'), est imaginaire négative.

Reste à traiter l'intégrale étendue au plan. La formule de Green se réduit à

$$-k_1^2 \int u_1 \bar{u}_1 \, \mathrm{d}S + \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) \mathrm{d}S = -jk_1 \int R^2 u_1 \bar{u}_1 \, \mathrm{d}\omega + \int u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma. \qquad (49)$$

Le premier membre est réel, le premier terme du second membre est imaginaire. On a de même dans le second milieu

$$-k_2^2 \int u_2 \bar{u}_2 \, \mathrm{d}S_2 + \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) \mathrm{d}S_2 = -jk_2 \int_{\text{sphère}} R^2 u_2 \bar{u}_2 \, \mathrm{d}\omega + \int_{\text{plan}} u_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma. \qquad (50)$$

Multiplions (49) par $\frac{1}{k_1^2}$, (50) par $\frac{1}{k_2^2}$ et ajoutons membre à membre, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\int u_1 \bar{u}_1 \, \mathrm{d}S_1 + \int u_2 u_2 \, \mathrm{d}S_2 - \frac{1}{k_1^2} \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \dots \right) \mathrm{d}S_1 - \frac{1}{k_2^2} \int \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \dots \right) \mathrm{d}S_2 \\ &= j \int_{\text{sphère sup.}} \frac{R^2}{k_1} u_1 \bar{u}_1 \, \mathrm{d}\omega + j \int_{\text{sphère inf.}} \frac{R^2}{k_2} u_2 \bar{u}_2 \, \mathrm{d}\omega \\ &\quad - \left\{ \int_{\text{plan}} \frac{1}{k_1^2} u_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\text{plan}} \frac{1}{k_2^2} u_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma \right\} \\ &\qquad (k_{1,2} \text{ réels} > 0). \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Comme n est la normale dirigée vers l'extérieur du domaine envisagé, on a le long du plan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{dans l'espace supérieur,} \\ \frac{\partial}{\partial n} &= +\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{» inférieur.} \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

En vertu de (II') l'accolade s'annule donc et il reste une équation dont le premier membre est purement réel et le second membre purement imaginaire. Celle-ci ne peut donc être vérifiée que si la différence u_1, u_2 entre les deux solutions supposées $\Pi_{1,2}$ et $\bar{\Pi}_{1,2}$ disparaît. La solution n'est donc pas seulement unique pour $k_{1\,2}$ complexes comme l'a jadis montré Sommerfeld (1909), mais aussi pour $k_{1,2}$ purement réels. La démonstration d'unicité précédente est bien entendu la réunion des modes de raisonnement de Sommerfeld de 1909 et 1913.

2. Nous allons maintenant montrer que l'onde de surface ne remplit pas la condition d'ondes divergentes.

En se restreignant aux grandes valeurs de r on avait

$$P = \frac{K}{\sqrt{r}} e^{-jk_1 \cos \vartheta_B z} e^{+jk_1 \sin \vartheta_B r} \tag{25}$$

Avec $\cos \vartheta_\beta > 0$. On voit qu'il s'agit ici d'un rayonnement venant de l'infini. Montrons encore

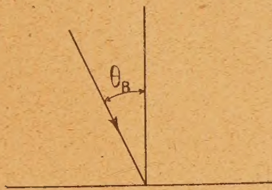


Fig. 10.

analytiquement que la condition d'ondes divergentes n'est pas respectée, par substitution dans l'expression (IV'). Nous fixons r et convenons que pour $z > r$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z},$$

ce qui revient à poser

$$z \approx R, \qquad z \to \infty.$$

Il vient alors

$$\lim_{z \to \infty} z \left(\frac{\partial}{\partial z} - jk_1 \right) u$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{zK}{\sqrt{r}} e^{-jk \sin \vartheta_B r} (-jk_1 \cos \vartheta_B - jk_1)$$

$$\times e^{-jk_1 z \cos \vartheta_B} \to \infty \quad \text{pour } z \to \infty, \tag{53}$$

car pour des $k_{1,2}$ finis, $\cos \vartheta_\beta \neq 1$.

Or l'équation d'ondes est analytique en $k^2_{1,2}$. Si l'on a une solution pour k réel, on peut la prolonger pour k complexe, elle reste bien déterminée en vertu de la démonstration d'unicité de Sommerfeld, mais elle ne saurait renfermer l'onde de surface.

3. Si nous voulons donc résoudre notre problème nous avons à tracer les chemins d'intégration de manière à remplir la condition d'ondes divergentes. Sommerfeld a fourni, dans son travail sur la fonction de Green, une série d'exemples à ce sujet. Appliquons donc ces principes à notre problème. A cet effet, représentons-nous bien comment Sommerfeld a tracé les contours d'intégration et avant tout les coupures de branchement et ce sous la forme qu'elles revêtent quand k_1 et k_2 deviennent réels (*fig.* 11).

Ainsi qu'il a été dit (*fig.* 2), Sommerfeld choisit à titre de coupures des hyperboles équilatères issues des points k_1 et k_2 qui ont pour asymptotes l'axe réel et imaginaire. Lorsque k_1 et k_2 sont réels, ces courbes se confondent d'abord avec l'axe réel compris respectivement entre k_2, k_1 et l'origine pour se transformer en l'axe imaginaire. Nous dessinons à part sur la figure 11, avant qu'ils ne se confondent, les deux bords des coupures séparément. Ainsi par exemple, la coupure k_1 est en traits interrompus; la lèvre qui forme le bord supérieur du demi-plan supérieur de λ est marquée par des hachures sur la ligne en traits interrompus;

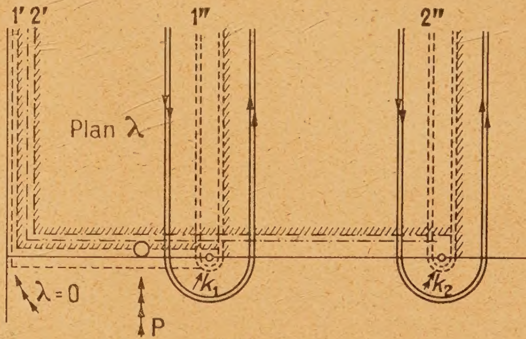


Fig. 11.

nous parlerons ainsi par la suite de lèvre « hachurée » et de lèvre « non hachurée ». De même nous marquons par des traits mixtes, une lèvre hachurée et une lèvre non hachurée de la coupure passant par k_2. Nous désignerons ces coupures par k_1 et k_2 par 1' et 2' respectivement. Rien ne nous empêche d'ailleurs de déplacer nos coupures dans le demi-plan supérieur vers les positions que nous avons désignées par 1'' et 2'', chaque lèvre étant alors marquées par des lignes doubles (deux lignes en traits interrompus, deux lignes en traits mixtes avec hachurage simple des lèvres). Nous pouvons encore faire passer les coupures à notre guise dans l'infini. Nous avons au préalable à déterminer la position du pôle. Pour cela figurons-nous le plan découpé suivant 1' et 2'. L'équation à résoudre est

$$k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = 0. \tag{54}$$

Ce dénominateur de l'expression à intégrer s'annule pour

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \quad \text{ou} \quad \lambda = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}. \tag{55}$$

Comme k_1^2 et k_2^2 sont toujours situés dans le premier quadrant, on voit tout de suite (analogie de la mise en parallèle d'impédances) que

$$|\lambda_P| < |k_1| \quad \text{et} \quad |\lambda_P| < |k_2|. \tag{56}$$

a. Indiquons dès lors la position exacte. Sommerfeld a montré que la racine se trouve dans le feuillet supérieur du plan armé des coupures 1' et 2', c'est-à-dire dans le domaine qui pour k_1 et k_2 devenant réels va se rétrécissant entre la lèvre hachurée de 1' et la lèvre non hachurée de 2'. Déplaçons main-

tenant cette dernière coupure vers la position 2′ et montrons que le pôle se trouve situé sur la lèvre supérieure hachurée de 1′ (*fig.* 12). Ainsi qu'on le voit le pôle se trouve à gauche de k_1, en un point où les deux radicaux $\sqrt{\lambda^2 - k_{1,2}^2}$ dans (54) sont de signe contraire. Ceux-ci sont normés de façon à tendre pour $\lambda \to +\infty$, vers la valeur λ, plus précisément vers $+\infty$. Ce choix résulte de la nécessité de convergence de nos intégrales. Si donc en partant de $+\infty$ nous considérons les deux radicaux dans (54), ils se trouvent être, à droite de k_1, tous les deux positifs et ils ne peuvent pas vérifier l'équation (54). Si l'on décrit la petite demi-circonférence inférieure marquée sur la figure, autour du point k_2, $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ devient négatif imaginaire et le reste le long de l'axe réel jusqu'à l'origine.

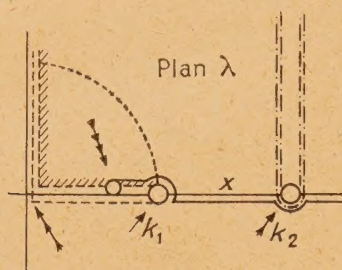
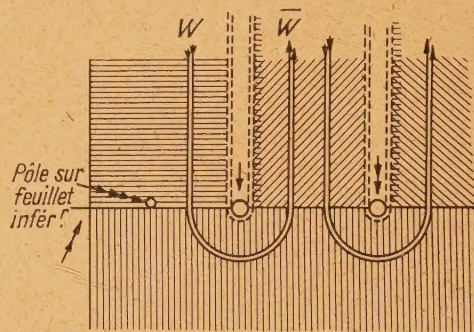


Fig. 12.

L'expression $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ est d'abord réelle jusqu'au point $\lambda = k_1$. Si maintenant une valeur réelle λ inférieure à k_1 doit être une solution de notre équation, il nous faut, pour la trouver, décrire, autour du point de ramification k_1 du radical $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ qui est un point régulier pour le radical $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$, un arc de cercle tel que le premier radical ait le signe contraire du second radical; c'est-à-dire on la trouvera sur le tronçon qui décrit un contour vers le haut autour du point $\lambda = k_1$. En ce point les radicaux ont des signes contraires, ils sont tous les deux imaginaires et l'équation (54) peut être remplie. Quand k_2^2 devient d'abord complexe, le point se déplace un peu vers le haut, reste néanmoins dans le cercle en traits interrompus dessinés sur la figure 12 centré à l'origine, de rayon $|k_1|$. Sommerfeld avait situé à l'époque, le pôle en un point qui correspond à peu près à la croix de la figure 12, donc à l'extérieur de ce cercle. C'est peut-être là la raison psychologique de l'erreur de Sommerfeld dont il sera question par la suite. Nous voyons à l'avance que par le choix des coupures 1″, 2″ que nous pouvons tracer à notre gré, le pôle disparaît sur le feuillet inférieur du plan λ. Un contour d'intégration qui entoure la coupure 1″ ne peut rencontrer le pôle. Lorsque k_2 devient infini, le pôle pénètre dans le point de branchement k_1; mais alors, ainsi que l'a montré Sommerfeld, le résidu s'annule et l'on obtient la solution connue d'Abraham qui ne renferme bien entendu, nulle onde de surface.

b. Nous allons mettre les choses au clair en faisant d'abord la représentation conforme du plan ϑ de Weyl sur le plan λ de Sommerfeld, en particulier pour le cas de k_1 et k_2 réels. Moyennant (31) $\lambda = k_1 \sin\vartheta$ on peut traduire la figure 10 dans le plan ϑ.

Nous découpons le plan λ le long de 1″ et 2″ suivant une droite parallèle à l'axe imaginaire; nous hachurons dans les deux plans, de la même façon, les domaines correspondants et choisissons les mêmes symboles pour des lignes correspondantes. Nous avons tracé en traits doubles, dans les deux plans (il faut souligner la correspondance avec le choix des coupures dessinées en traits doubles), un chemin d'intégration qui correspond à celui de Weyl. Nous ferons d'abord abstraction comme le fait Sommerfeld, du contour autour de la coupure passant par k_2, il ne peut être important que pour



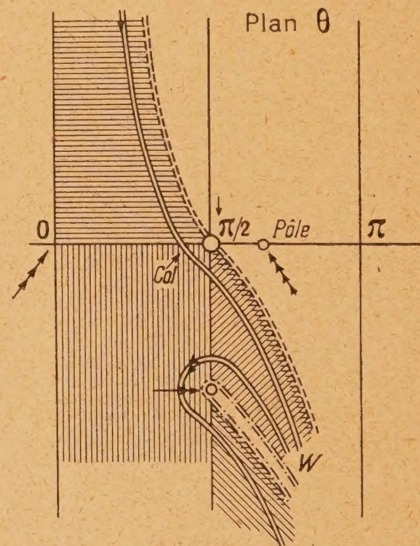


Fig. 13 *a* et 13 *b*.

des k_2 purement réels au voisinage immédiat du sol; nous y reviendrons. Or le chemin de Weyl passe par un col, situé sur l'axe réel entre o et $\frac{\pi}{2}$ et qui correspond à la valeur $\mathfrak{I}$ qui correspond au point de réception. Ce col fournit le développement asymptotique de l'intégrale. Cela a un sens physique très clair. Lors d'une intégration par rapport à l'angle d'incidence $\mathfrak{I}$, ce qui fournit la partie principale c'est ce qui correspond à l'angle réel du point de réception.

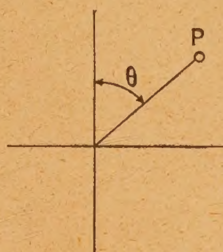


Fig. 14.

Comme nous le voyons donc, les lignes en traits doubles se correspondent. Le chemin de Weyl $W\overline{W}$ correspond au chemin du plan λ qui passe sur le feuillet supérieur du plan λ qui, en raison de l'entaille le long de 1″, ne renferme plus aucun pôle. Son développement asymptotique appuyé sur le col mentionné ne contient pas d'onde de surface. Son calcul est correct.

c. Or il en résulte une conséquence essentielle (*fig.* 13). Si nous faisons passer de nouveau, dans le plan λ, la coupure par le pôle et si nous déformons le chemin $W\overline{W}$ chez Weyl de manière que $\overline{W}$ se transforme dans le chemin $\overline{\overline{W}}$ de la figure 15 et

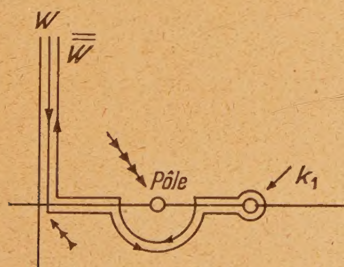


Fig. 15.

qu'il passe par-dessus le pôle, le chemin $W\overline{\overline{W}}$ ensemble avec le résidu au pôle, doit donner la même chose que $W\overline{W}$ précédemment : en d'autres termes, il ne peut pas y avoir dans la somme des deux, d'onde de surface et, par suite, la partie $\overline{\overline{W}}$ doit renfermer l'onde de surface ou le résidu avec le signe contraire. Il suffit de montrer cela en première approximation, le théorème de Cauchy garantit dès lors qu'il en est ainsi en toute rigueur (*fig.* 16, 17). Nous avons représenté sur la figure 15

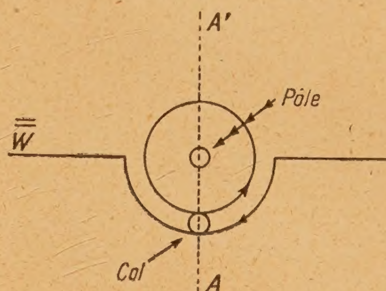


Fig. 16.

le voisinage du pôle; la figure 17 représente les valeurs de l'intégrale le long de AA′ et nous montrerons qu'au point C il y a un col qui est entouré par la circulation autour du pôle et par le

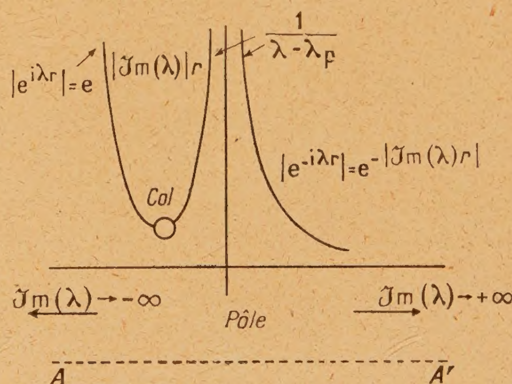


Fig. 17.

chemin $\overline{\overline{W}}$ en sens contraire. En partant du pôle vers le haut (c'est-à-dire quand la partie imaginaire de λ va en croissant), la valeur de l'intégrale diminue : 1° en raison du facteur $\frac{1}{\lambda - \lambda_p}$ dû au voisinage du pôle et ensuite 2° parce que le facteur exponentiel $e^{i\lambda r}$ qui est dû asymptotiquement à la fonction de Hankel sous le signe somme, décroît exponentiellement comme exp. $(-Im(\lambda)r)$ et cela d'autant plus rapidement que r est plus grand. Vers le bas, bien entendu, l'expression à intégrer décroît d'abord quand on s'éloigne du pôle pour recommencer à croître exponentiellement dans l'autre direction, précisément en vertu de ce facteur exponentiel. Entre ces deux allures se trouve un point C qui est un col.

On pourrait alors songer à calculer le résidu en

première approximation comme intégrale de col. Sa partie principale serait alors fournie par ce col. Le chemin $W\overline{\overline{W}}$ parcourt ce col en sens inverse et annule cette partie due au pôle. Ceci vaut en première approximation, mais il doit en être ainsi en toute rigueur en vertu du théorème de Cauchy. Nous allons encore calculer le col analytiquement de la manière suivante. Si nous remplaçons la fonction de Hankel [(21)] par son développement asymptotique (ce qu'on peut faire pour r grand) et si nous nous limitons, pour des raisons de simplicité, à des z petits ($z \leqslant r$) on a en vertu de (19) (exp. $(-z\sqrt{\lambda^2-k_1^2})$ étant défini comme lentement variable) dans l'expression à intégrer

$$\frac{e^{j\lambda r}}{k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} \approx e^{j\lambda r-\ln[a(\lambda-\lambda_P)+\ldots]} \quad (57)$$

si l'on développe le dénominateur autour de sa racine avec un coefficient a

$$k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2} \approx a(\lambda-\lambda_P)+\ldots. \quad (58)$$

Si maintenant on dérive l'exposant par rapport à λ et qu'on annule le résultat, on obtient

$$jr-\frac{1}{\lambda-\lambda_P}=0, \quad (59)$$

d'où l'on tire pour le col

$$\lambda=\lambda_C=\lambda_P-\frac{j}{r}, \quad (60)$$

ce qui montre que pour chaque r fixe, le col est situé au-dessous du pôle P.

La controverse autour de l'onde de surface qui dure depuis près de 30 ans se trouve de ce chef définitivement tranchée. Le développement asymptotique dû à Sommerfeld de l'intégrale prise sur la coupure de ramification, s'appuie uniquement sur le point k_1 ou, ainsi que le montre la solution de Weyl, sur la partie du chemin W qui est parcouru devant le point k_1. Ce col a échappé à Sommerfeld probablement parce qu'il avait dessiné le pôle simplement en un point (marqué par une croix sur la figure 11) situé par trop à droite.

d. Il nous reste encore à traiter brièvement la coupure par k_2. Quand k_2 est complexe, l'intégrale correspondante est exponentiellement atténuée le long de r (exp. $[-\delta r]$, avec une valeur convenable de δ) comme l'a montré Sommerfeld et peut être négligée. Si k_2 est purement réel, un calcul effectué par la méthode du col montre qu'il se produit une onde qui est exponentiellement atténuée, vers le haut, pour z croissant et qui ne joue un rôle qu'au voisinage immédiat du sol. Mais comme nos considérations se rapportent pour des valeurs purement réelles de k_2, à un cas limite qui, du point de vue de l'explication théorique, est important, et comme des valeurs purement réelles de k_2 ne se présentent guère sur la surface du sol, la contribution due à la seconde coupure n'est guère mesurable et peut, partant, être négligée.

D. **Résumé des conclusions.** — 1. L'onde de surface n'est pas contenue dans le rayonnement d'un dipôle sur un sol plan car elle ne vérifie pas la condition des ondes divergentes.

2. Il résulte d'une étude précise que les calculs de Weyl et de Sommerfeld ne diffèrent que parce qu'un col est passé inaperçu chez ce dernier, col qui annule la partie due à l'onde de surface.

3. Contrairement à l'affirmation d'Epstein, le problème est bien déterminé et unique.

4. Le raisonnement d'Epstein montre néanmoins que l'onde de surface ne peut faire partie de la solution car sa singularité de ligne contredit celle exigée par le problème.

5. Les résultats expérimentaux confirment cette conception théorique.

Manuscrit reçu le 12 novembre 1948.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ZENNECK, *Ann. der Physik*, 1907, **4**, vol. **23**, p. 846 et suiv.
[2] SOMMERFELD, *Ann. der Physik*, 1909, **4**, vol. **28**, p. 665 et suiv.
[3] SOMMERFELD, *Jahresber. der Deutsch. Math.-Vergg*, 1913, p. 309 et suiv.
[4] WEYL, *Ann. der Physik*, 1919, **4**, vol. **60**, p. 481 et suiv.
[5] NOETHER dans ROTHE, OLLENDORFF, POHLHAUSEN, *Funktionentheorie*, etc., 1931, p. 154 et suiv.
[6] NORTON, *Proc. I. R. E.*, septembre 1937, p. 1192 et suiv.
[7] EPSTEIN, *Proc. Nat. Ac. Sc. of Am.*, juin 1947.
[8] LEDINEGG, *Ann. der Physik*, 1943.
[9] SOMMERFELD dans FRANCK-MISES, *Diff. und Integral-gl.*, etc., II.
[10] COURANT-HILBERT, *Meth. der Math. Phys.*, II.
[11] MAGNUS, *Jahresber. der Deutsch. Math. Ver.*, **32**, p. 177 et suiv.
[12] SLATER, *Microwave Transmission*, 1942.
[13] MONTGOMERY, *Principles of microwave circuits*, 1948.
[14] SOMMERFELD, *Partielle Differential Gleichungen der Physik*, Leipzig, 1947.
[15] ECKART, *La Recherche aéronautique*, novembre 1948.
[16] BURROWS, *Proc. I. R. E.*, février 1937.
[17] KAHAN-ECKART, *C. R. Acad. Sc.*, Fr., 1948, **226**, p. 1513.
[18] KAHAN-ECKART, *C. R. Acad. Sc.*, Fr. **227**, p. 969.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 131 478 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1949.